1. Lineare Algebra

1.1. Matrizenkalkül

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad \text{m x n-Matrix}$$

transponierte Matrix A^T (A^t, A', ...)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Bei <u>quadratischen Matrizen</u> (m=n) entspricht das Transponieren auch dem Spiegeln an der sog. <u>Hauptdiagonalen</u> (H.D.)

$$\text{z.B.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

H.D.

<u>Def.:</u> A heißt symmetrisch $:\Leftrightarrow A^T = A$

<u>Def.:</u> Matrizen mit nur einer Spalte heißen auch <u>Spaltenvektoren</u>.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \qquad (\vec{x})$$

$\mathbb{R}^m$ = Menge aller Spaltenvektoren mit m Komponenten $\in \mathbb{R}$

m x n – <u>Nullmatrix</u> $\quad 0 := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ (genauer $0_{m,n}$, Kontext!)

n x n – <u>Einheitsmatrix</u> (immer quadratisch)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Einsen auf der H.D., sonst Nullen

(genauer I_n E, E_n Kontext)

Operationen

$-(a_{ij}) := (-a_{ij})$

$a \cdot (a_{ij}) := (a \cdot a_{ij})$

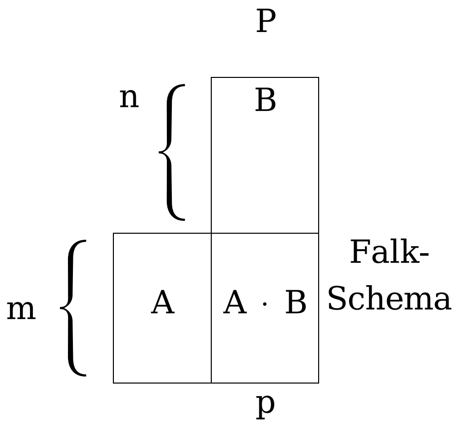
$(a_{ij}) \pm (b_{ij}) := (a_{ij} \pm b_{ij})$

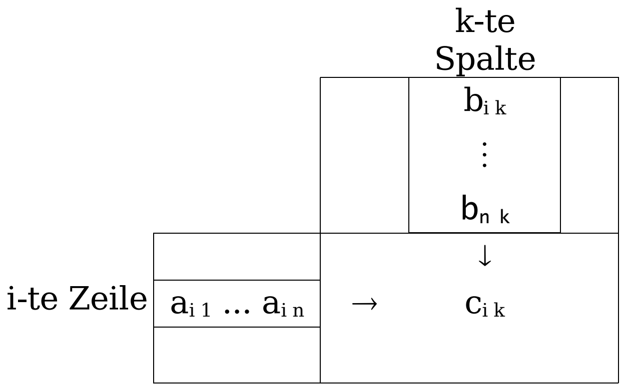
$(a, b \text{ gleiches Format})$

$(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \cdot (b_{jk})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le k \le p}} := (c_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le p}}$

$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$

i-te Zeile mal k-te Spalte





$\underset{m,n}{A} \cdot \underset{n,p}{B} = \underset{m,p}{C}$

$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{ik} + a_{i2} b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}$

Beispiel: „Stücklisten“

R_i: Rohstoffe

Z_j: Zwischenprodukte

E_k: Endprodukte

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	1	4	0	8
R_2	3	1	1	2

	E_1	E_2	E_3
Z_1	4	1	0
Z_2	0	1	0
Z_3	2	2	0
Z_4	0	1	2

Frage: „Wie“ gehen die Rohstoffe in die Endprodukte ein?

	E_1	E_2	E_3
R_1	4	13	16
R_2	14	8	4

Beispiel:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} -8 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

Jede Spalte von C ist eine Linearkombination der Spalten von A.
Matrix * Spaltenvektor = Spaltenvektor
Zeilenvektor * Matrix = Zeilenvektor
Jede Zeile von C ist eine Linearkombination der Zeilen von B.

Matrizeninversion (nur für quadratische Matrizen)

Def.: Eine m x n-Matrix A heißt invertierbar (regulär, nichtsingulär) :⇔ Es gibt eine Matrix X mit AX = XA = I

Satz (o.B.): AX = I ⇔ XA = I

Satz: Es gibt höchstens ein X wie oben.

Bew.: $A X_1 = X_1 A = I ; A X_2 = X_2 A = I$
$\Rightarrow X_1 = X_1 \cdot I = X_1 \cdot (A X_2) = (X_1 \cdot A) \cdot X_2 = I \cdot X_2 = X_2$ □

Def.: Ist AX = I, dann nennt man X die inverse Matrix von A (Kehrmatrix von A), in Zeichen $X = A^{-1}$

$$\boxed{A A^{-1} = A^{-1} A = I}$$

Satz: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ invertierbar $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

in diesem Fall ist $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Beisp.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Bem.: Es gibt auch „Inversionsformeln“ für n > 2 → aufwendig!
Stattdessen:

Matrizeninversion mit Gauß-Jordan

$A \mid I$

elementare Zeilenoperationen

$I \mid A^{-1}$

Beisp: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$
\begin{array}{c|ccc|ccc|c}
 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
- & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & + \\
 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & \cdot\frac{1}{2} \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & (-2)\ \ - \\
 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & - \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\
 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
\hline
\end{array}
$$

Beisp.:

$$I \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz: Eine n x n-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn für jedes $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ das

LGS $A\underline{x}=\underline{b}$ genau eine Lösung hat (nämlich $\underline{x}=A^{-1}\underline{b}$)

Bem.: $A\underline{x}=\underline{b}$ über A^{-1} zu lösen ist i.A. ein Umweg!

Satz: Eine n x n-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $A\underline{x}=\underline{0}$ nur die sogenannte triviale Lösung $\underline{x}=\underline{0}$ hat.

1.2. Determinanten (nur bei quadratischen Matrizen)

Def.: $\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .= ad-bc$ Sarrus

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} := \begin{matrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{matrix}$$

❢ läßt sich nicht auf 4 x 4-Matrizen übertragen

Rekursive Definition der Determinante

$$\det A := a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - + \ldots = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{1+j}\cdot D_{ij}$$

„entwickeln nach der 1-ten Zeile“

dabei ist

$$D_{ik} := \det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} :=$$

Determinante der (n – 1) x (n – 1)-Matrix, welche sich durch Streichen oder i-ten Zeile und k-ten Spalte ergibt.

Beispiel:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 1+0+2-4-0-0=-1$$

rekursiv: $1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 4\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= 1\cdot 1 - 4\cdot 1 + 2\cdot 1 = -1$

Beispiel:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 60 & 19 & 3 \end{bmatrix} = 1\cdot\det\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 60 & 19 & 3 \end{bmatrix} - 0\cdot\det + 0\cdot\det - 0\cdot\det =$$

$$= 1\cdot\left(-2\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 19 & 3 \end{bmatrix} - 0 + 0\right) = 1\cdot(-2)\cdot 1\cdot 3 = -6$$

Satz: Die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente auf der H.D.

$\boxed{\begin{matrix} \det 0 = 0 \\ \det I = 1 \end{matrix}}$ o.B.: $\boxed{\det A = \det A^T}$

Satz: Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist gleich der Produkte der

Elemente der H.D.

Determinanten-Multiplikationsgesetz (o.B.)

$\boxed{\det(AB)=(\det A)\cdot(\det B)}$

Folgerung $(\det A^n)=(\det A)^n$

$(\det A^{-1})=(\det A)^{-1}$ $\quad 1=\det I=\det(AA^{-1})=(\det A)\cdot\det(A^{-1})$

Folgerung: A invertierbar $\Rightarrow$ $\det A\neq 0$ (später: Es gilt auch die Umkehrung)

Laplacescher Entwicklungssatz (o.B.)

a) i fest

$$\det A=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$$ „entwickeln nach der i-ten Zeile“

wg. $\det A=\det(A^T)$ gilt auch

b) j fest

$$\det A=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot(-1)^{i+j}\cdot D_{ij}$$ „entwickeln nach der j-ten Spalte“

Vorzeichen:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \dots \\ + & - & + \\ - & + \\ \vdots & \vdots \end{matrix}$$

wie Schachbrett

$$\det\begin{bmatrix}1&4&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\underset{2.\,\text{Zeile}}{=}1\cdot\det\begin{bmatrix}4&2\\1&1\end{bmatrix}+1\cdot\det\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}-0\cdot\det\ldots=\ldots=-1$$

oder z.B.: $$\det\begin{bmatrix}1&4&2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\underset{3.\,\text{Spalte}}{=}2\cdot\det\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}-0\cdot\det\ldots+1\cdot\det\begin{bmatrix}1&4\\1&1\end{bmatrix}=\ldots=-1$$

weitere Rechenregeln für Determinanten

$\rightarrow$

(1) Der Wert von det A ändert sich nicht, wenn man in A zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert

(2) Ein gemeinsamer Faktor der Elemente einer Zeile kann „vor die det. gezogen“ werden:

$$\det\begin{bmatrix}\cdots\\ a\cdot a_{i1}\cdots a\cdot a_{in}\\ \cdots\end{bmatrix}=a\cdot\det\begin{bmatrix}\cdots\\ a_{i1}\cdots a_{in}\\ \cdots\end{bmatrix}$$ aber: $\det(a\cdot A)=a^n\cdot\det A$ (A n x n-Matrix)

(3) det A=0, wenn A eine Nullzeile hat, oder wenn 2 Zeilen von A proportional sind (wenn eine Zeile Linearkombination von anderen Zeilen ist).

(4) Durch Vertauschen zweier Zeilen wechselt das Vorzeichen von det A

Wegen $\det A = \det A^T$ erhält man 4 weiter Regeln (1') – (4'), indem man überall das Wort „Zeilen“ durch „Spalten“ ersetzt.

Beisp.:

$$\det\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{bmatrix} \cdot(-2)\ (-3) = \det\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\0&-1&-6&1\\0&-6&-8&2\end{bmatrix} \underset{1.\,\text{Sp.}}{=} -1\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&-6&1\\-6&-8&2\end{bmatrix} \cdot(-6)\ +$$

$$= -\det\begin{bmatrix}1&-4&4\\-1&0&0\\-6&28&-4\end{bmatrix} \underset{2.\,\text{Zeile}}{=} -(-(-1))\cdot\det\begin{bmatrix}-4&4\\28&-4\end{bmatrix} \underset{\text{-4 in beiden Zeilen}}{=} -16\cdot\det\begin{bmatrix}1&-1\\-7&1\end{bmatrix} =$$

$$= -16\cdot(-6) = 96$$

Cramersche Regel:

nur sinnvoll für n = 2 (n = 3 ?)

A quadratisch

$A\,\underline{x} = \underline{b}$ hat genau eine Lösung, wenn $\det A \neq 0$

In diesem Fall gilt $x_i = \frac{1}{\det A}\cdot\det\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&b_1&\cdots&a_1n\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&&b_n&&a_{nn}\end{bmatrix}$

i-te Spalte wird durch $\underline{b}$ ersetzt

Beispiel: $x_1 + 3x_2 = 1$
$2x_1 - x_2 = 9$

$$\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$$

A; det A = -7,

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix}1&3\\9&-1\end{pmatrix}}{-7} = 4$$

$$x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix}1&1\\2&9\end{pmatrix}}{-7} = -1$$

Beispiel mit n = 4: $\begin{pmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\10\\1\\3\end{pmatrix}$

Gauß:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 & -19 \\ 0 & -6 & -8 & 2 & -26 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & 4 & 20 & -8 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -24 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x_4=-1; -x_3+x_4=-4 \Rightarrow x_3=3; x_2=3-2x_3-3x_4=0; x_1=10-3x_3; x_1=1$$

$$\text{Lösg.}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Cramer:

$$x_2=\frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}}{\det A}=\frac{1}{\det A}\cdot\det\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\cdot\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots \\ 2 & 2 & \cdots \\ 3 & 3 & \cdots \end{bmatrix}=0$$

Formel für A^{-1} (Cramer)

A invertierbar $\Rightarrow \det A \neq 0$.

In diesem Fall ist $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} & \cdots \\ -D_{21} & D_{22} & D_{23} & \cdots \\ D_{31} & -D_{32} & D_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}^T$ (Schachbrett-Vorzeichen)

Beispiel:
$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$D_{11}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$$
$$D_{12}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=0$$
$$D_{13}=\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-1$$
$$D_{21}=\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1$$
$$D_{22}=\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-2$$
$$D_{23}=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-1$$
$$D_{31}=\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-1$$
$$D_{32}=\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-2$$
$$D_{33}=\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-1$$
$$A \underset{1.\text{Sp.}}{=} -1\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}+1\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=-2$$
$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -0 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

1.3. Eigenwerte (EW) und Eigenvektoren (EV)

Alle Matrizen in diesem Kapitel sind quadratisch (n x n)

Definition: λ heißt EW von A :⇔ Es gibt ein $\underline{x}\neq\underline{0}$ mit $A\,\underline{x}=\lambda\,\underline{x}$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}4\\ 4\\ 8\end{pmatrix}$$

d.h. 4 ist EW von A

Definition (Fortsetzung): Ist $A\,\underline{x}=\lambda\,\underline{x}$, $\underline{x}\neq 0$, so heißt $\underline{x}$ ein zum EW λ gehöriger EV.

Obiges Beispiel: $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ ist EV zum EW 4.

Beispiel: Differentialgleichungssysteme, linear, homogen, mit konstanten

Koeffizienten
Ges.: n x n Matrix A
Ges.: n Funktionen $z_1(t)$, ..., $z_n(t)$ mit den Eigenschaften

$$z_1 = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + \ldots + a_1 n z_n$$
$$z_2 = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + \ldots + a_2 n z_n$$
$$\vdots$$
$$\underline{z_n = a_{n1} z_1 + a_{n2} z_2 + \ldots + a_{nn} z_n}$$

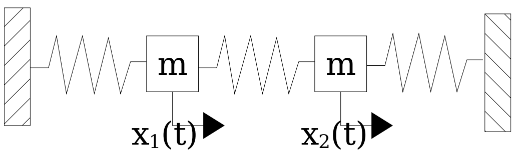
Ansatz: $z_i(t) = c_i \cdot e^{\lambda t} \quad i = 1, \ldots, n$

$$\lambda c_1 e^{\lambda t} = a_{11} c_1 e^{\lambda t} + a_{12} c_2 c^{\lambda t} + \ldots + a_1 n c_n c^{\lambda t}$$
$$\lambda \cdot c_2 e^{\lambda t} = a_{21} c_1 e^{\lambda t} + a_{22} c_2 e^{\lambda t} + \ldots + a_2 n c_n e^{\lambda t}$$
$$\vdots$$
$$\underline{\lambda c_n e^{\lambda t} = a_{n1} c_1 e^{\lambda t} + a_{22} c_2 e^{\lambda t} + \ldots + a_{nn} c_n e^{\lambda t}}$$

$t = 0$

$$\lambda c_1 = a_{11} c_1 + \ldots + a_1 n c_n$$
$$\vdots$$
$$\lambda c_n = a_{n1} c_1 + \ldots + a_{nn} c_n$$
$$\lambda \cdot \underline{c} = A \cdot \underline{c}$$

woher DGL-Systeme?



$$F_1 = m \cdot \ddot{x}_1 = -k x_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$F_2 = m \ddot{x}_2 = -k x_2 + k(x_1 - x_2)$$

$$\ddot{x}_1 = \left(-\frac{2k}{m}\right) x_1 + \frac{k}{m} x_2$$ DGL-System 2. Ordnung →

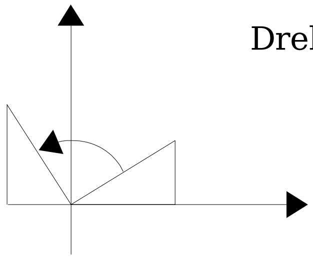
$$\ddot{x}_2 = \frac{k}{m} x_1 - \frac{2k}{m} x_2$$ DGL-System 1. Ordnung

$$z_1 := x_1 ; z_2 = \dot{x}_1 ; z_3 = x_2 ; z_4 = \dot{x}_2$$
$$\dot{z}_1 = z_2$$
$$\dot{z}_2 = \left(\frac{-2k}{m}\right) z_1 + \frac{k}{m} z_3$$
$$\dot{z}_3 = z_4$$
$$\dot{z}_4 = \frac{k}{m} z_1 - \frac{2k}{m} z_3$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & \frac{-2k}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Gibt es immer reelle EW, EV?

$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}; A\underline{x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\ x_1\end{bmatrix}$



Drehung um $\frac{\pi}{2}(=90°)$

$\boxed{A\underline{x}=\lambda\underline{x}, \underline{x}\neq\underline{0}}$

$\underline{x}$ EV zum EW λ

<u>Überlegung:</u> $A\underline{x}=\lambda\underline{x}=\lambda\cdot I\cdot\underline{x}\Rightarrow\underline{0}=A\underline{x}-\lambda I\underline{x}=(A-\lambda I)\underline{x}$

Einheitsmatrix

$A\underline{x}=\lambda\underline{x}\Rightarrow\boxed{(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0}}$

homogenes LGS, hat genau dann Lösungen $\underline{x}\neq\underline{0}$, wenn $\det(A-\lambda I)=0$, d.h. wenn $A-\lambda I$ nicht invertierbar ist.

<u>Def.:</u> $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ ist ein Polynom n-ten Grades und heißt <u>charakteristisches Polynom von A</u>.

<u>Satz:</u> Die EW von A sind die Nullstellen von $p(\lambda)$. Die EV zu λ sind die Lösungen $\neq\underline{0}$ von $(A-\lambda I)\underline{x}=\underline{0}$.

Beispiele:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{bmatrix}$$ Berechnen Sie alle EW, EV

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\left(A-\begin{pmatrix}\lambda & & & 0\\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{bmatrix}$$

λ auf der H.D. abziehen!

$$=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -3 & 0\\ 3 & -5-\lambda & -2-\lambda\\ 6 & -6 & -2-\lambda\end{bmatrix} \quad =\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -3 & 0\\ 3 & -5-\lambda & -2-\lambda\\ 3 & -1+\lambda & 0\end{bmatrix}=$$

$$\underset{3.\,\mathrm{Sp.}}{=}\underbrace{(2+\lambda)}_{\text{VZ! Schachbrett}}\det\begin{bmatrix}1-\lambda & -3\\ 3 & -1+\lambda\end{bmatrix}=(2+\lambda)[-(1-\lambda)^2+9]=$$

$$\underset{a^2-b^2=(a+b)(a-b)\text{ oder }ax^2+bx+c=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})}{=}(1+\lambda)(3+(1-\lambda))(3-(1-\lambda))=(2+\lambda)^2(4-\lambda)$$

$\Rightarrow$ EW: $\lambda=4$ einfach

$\lambda=-2$ doppelt

EV zu $\lambda=4$

$(A-4I)\underline{x}=0$ Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-3 & -3 & 3 & 0\\ 3 & -9 & 3 & 0\\ 6 & -6 & 0 & 0\end{array}\right]\quad \begin{array}{l}+\\ \cdot 2\end{array}$$

Rechte Seite bleibt $\underline{0}$

-3	-3	3
0	-12	6
(0	-12	6)

$x_3 = t\,(\text{frei wählbarer Parameter})$

$-12 \cdot x_2 + 6x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} t$

$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} t$

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{ t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{alle EV} \\ \text{zu } \lambda = 4 \end{matrix} \right\} \cup \{\underline{0}\} =$$

$=:$ <u>Eigenraum</u> zum EW $\lambda = 4$

$=: E_{\lambda=4}$

$$E_{\lambda=-2}: \begin{matrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$x_1 - x_2 + x_3 = 0$

$x_3 = r, x_2 = s \quad (\text{Parameter})$

$x_1 = s - r$

$$E_{\lambda=-2} = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Definition:</u>

λ EW von A

$m(\lambda)$:= Vielfachheit von λ

$\dim E_\lambda$:= Dimension von E_λ (= Anzahl der Parameter in E_λ)

<u>Satz (o.B.):</u> Für jeden EW gilt $\dim E_\lambda \le m(\lambda)$

<u>insbes.:</u> Für <u>einfache EW</u> λ ist $\dim E_\lambda = 1$

<u>Beispiel</u> für „<“:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

$\lambda = 1 \quad 3\text{-facher EW}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & x_3 = 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 = 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 = t \text{ freier Parameter} \end{matrix}$$

$$E_\lambda:\ E_\lambda=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}\right\}\qquad \dim E_\lambda=1<3=m(x)$$

<u>Satz (o.B.)</u>: Ist A <u>symmetrisch</u>, dann gilt

a) $\dim E_\lambda=m(\lambda)$ für alle EW λ

b) $p(\lambda)$ zerfällt vollständig in reelle Linearfaktoren

c) EV zu verschiedenen EW stehen aufeinander senkrecht ($\underline{x}$ steht auf $\underline{y}$ senkrecht $:\Rightarrow \underline{x}^T\cdot\underline{y}=\sum x_i y_i=0$)

Skalarprodukt

Beweis von c):

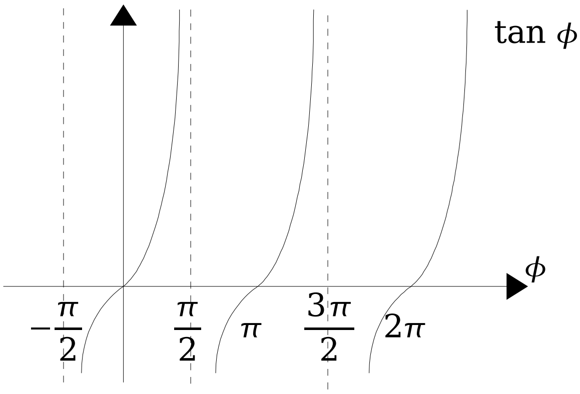
$$A\,\underline{x}=\lambda\,\underline{x},\ A\,Y=\mu\,\underline{y},\ \lambda\neq\mu$$

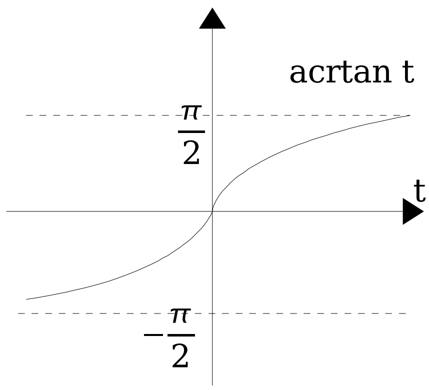
$$\underbrace{(\lambda-\mu)}_{\neq 0}\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{y}=\lambda\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{y}-\mu\cdot\underline{x}^T\cdot\underline{y}=(\lambda\,\underline{x})^T\cdot\underline{y}-\underline{x}^T\cdot\mu\,\underline{y}=(A\,\underline{x})^T\cdot\underline{y}-\underline{x}^T A\,\underline{y}\underset{\uparrow A=AT}{=}\underline{x}^T A\,\underline{y}\cdot\underline{x}^T A\,\underline{y}=0$$

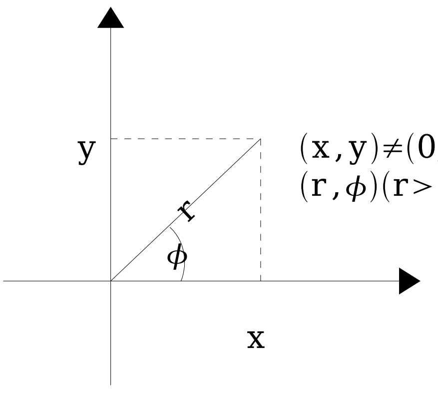
$$\Rightarrow\underline{x}^T\cdot\underline{y}=0$$

<u>2. Polarkoordinaten</u>

Vorbetrachtung







$(x,y)\neq(0,0)$ <u>kartesische Koordinaten</u>

$(r,\phi)(r>0, 0\leq\phi<2\pi)$ <u>Polarkoordinaten</u>

polar → kartesisch: $x=r\cdot\cos\phi$

$y=r\cdot\sin\phi$

kartesisch → polar: $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$$x\neq 0: \phi=\arctan\frac{y}{x}+C; C=\begin{cases} 0 \text{ falls } (x,y) \text{ im 1. Q.} \\ \pi \text{ falls } (x,y) \text{ im 2. Q., 3. Q.} \\ 2\pi \text{ falls } (x,y) \text{ im 4. Q.} \end{cases}$$

Beispiel:

(-1, 1) P_1	(1,1) P_2
P_3 (-1, -1)	P_4 (1, -1)

$r=\sqrt{2}$

$\phi_1=\frac{\pi}{4}, \phi_2=\frac{3\pi}{4}, \phi_3=\frac{5\pi}{4}, \phi_4=\frac{7\pi}{4}$

$\phi_1=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

$\phi_2=\underset{+\pi}{\arctan}(-1)=-\underset{+\pi}{\arctan} 1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

$\phi_3=\arctan 1+\pi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$

$\phi_4=\arctan(-1)+1\pi=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

3. Komplexe Zahlen

3.1. Einführung

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1}{2a}(-b\pm\sqrt{D}) \text{ mit } D=b^2-4ac$$

für $D<0$ ist $\sqrt{D}:=i\cdot\sqrt{-D}$ mit $i^2=-1$

Beisp.: $x^2-2x+4=0$

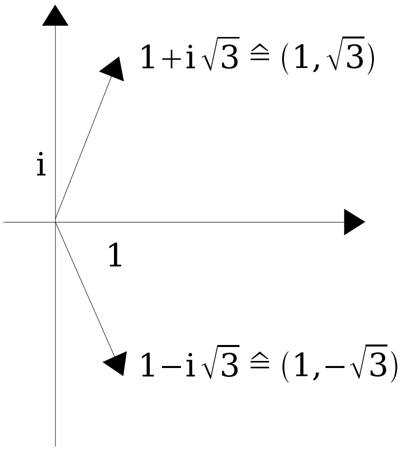
$$x_{1,2}=\frac{1}{2}(2\pm\sqrt{-12})=\frac{1}{2}(2\pm i\sqrt{-12})=1\pm i\sqrt{3}$$

$\mathbb{C} := \{x + iy: x,y \in \mathbb{R}\}$ = Menge der komplexen Zahlen

Veranschaulichung in $\mathbb{R}^2$: Gaußsche Zahlenebene

$z = x + iy \mathrel{\hat{=}} (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Rez $\in \mathbb{R}$ Imz $\in \mathbb{R}$



<u>konjugiert komplexe Zahl</u> $\bar{z}=x-iy\,(=z^*)$

Betrag von z: $|z|=:r=\sqrt{x^2+y^2}$

4 „Grundrechenarten“ wie gewohnt mit $\boxed{i^2=-1}$

z.B. $(1+2i)(-2+i)=-2+i-4i+\underbrace{2i^2}_{=-2}=-4+3i$

$$\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{-2+i}\cdot\frac{-2-i}{-2-i}\underset{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}{=}\frac{-2-i-4i+2}{4+1}=-i$$

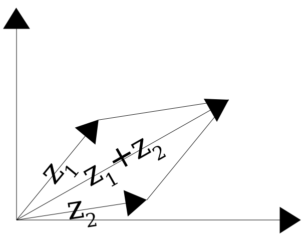
Ergebnis immer von der Form a + ib

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}\underset{z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2-(iy)^2=x^2+y^2}{=}\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

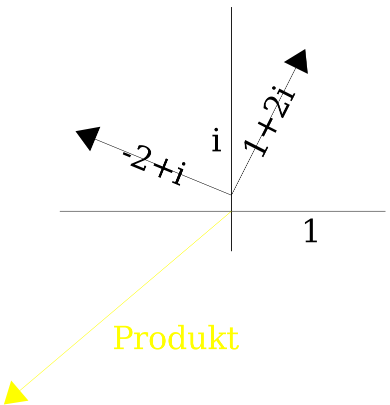
$\mathbb{C}$ ist damit ein Körper (Field)

<u>geometrisch</u> bedeutet die <u>Addition</u> die übliche Vektoraddition:

$$z_1=x_1+iy_1 \mathrel{\widehat{=}} (x_1,y_1)$$
$$z_2=x_2+iy_2 \mathrel{\widehat{=}} (x_2,y_2)$$
$$z_1+z_2=x_1+x_2+i(y_1+y_2) \mathrel{\widehat{=}} (x_1+x_2,y_1+y_2)$$



<u>Multiplikation geometrisch?</u>



$z_1 z_2=(x_1+y_1)(x_2+iy_2)=x_1 x_2-y_1 y_2+i(x_1 y_2+y_1 x_2)$

$(x_{1,}y_1)\cdot(x_{2,}y_1)=(x_1 x_2-y_1 y_{2,}x_1 y_2+y_1 x_2)$

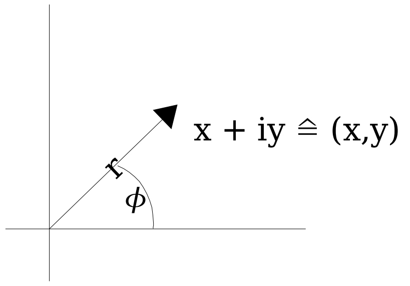
$\left(i:=(0,1),i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)\right)$

<u>Polarform</u> einer komplexen Zahl z = x + iy

Polarkoordinaten: $x=r\cdot\cos\phi ; y=r\cdot\sin\phi$

$$z=x+iy=r\cdot\cos\phi+ir\cdot\sin\phi$$

$$z=\underset{\in\mathbb{R}^+}{r}\underbrace{(\cos\phi+i\sin\phi)}_{\substack{\text{komplexe Zahl von Betrag 1}\\ \cos^2\phi+\sin^2\phi=1}}$$



<u>Beispiel:</u> $z=1+i\sqrt{3}=2\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$$\left(\frac{\pi}{3}=\arctan\frac{\sqrt{3}}{1,}\tan\pi\,\text{over}3=\sqrt{3}\right)$$

$z_1\cdot z_2=r_1\cdot(\cos\phi_1+i\sin\phi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\phi_2+i\sin\phi_2)=$

$=r_1 r_2(\underbrace{\cos\phi_1\cos\phi_2-\sin\phi_1\sin\phi_2}_{\cos(\phi_1+\phi_2)}+i(\underbrace{\cos\phi_1\sin\phi_2+\sin\phi_1\cos\phi_2}_{\sin(\phi_1+\phi_2)}))$

komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man die Beträge multipliziert und die Winkel <u>addiert</u>.

$i^2=-1$

$($ $i^3=-i$

$i^4=1$

$i^5=i$

$i^{27}=i^{64+3}=i^{4\cdot 6}\cdot i^3=(i^4)^6\cdot i^3=1^6\cdot i^3=i^3$

$i^n\underset{0\le r<4}{=}i^{4m+r}=\underbrace{(i^4)}_{=1}^m\cdot i^r=i^r$ $)$

$(\cos\phi+i\sin\phi)^3=\cos 3\phi+i\sin 3\phi=$

$=\cos^3\phi+3i\cos^2\phi\sin\phi-3\cos\phi\sin^2\phi-i\sin^3\phi$

$\cos 3\phi=\cos^3\phi-3\cos\phi\sin^2\phi$

$\sin 3\phi=3\cos^2\phi\sin\phi-\sin^3\phi$

$r=n\,\mathrm{MOD}\,4$

Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$ analog zu $\mathbb{R}$

z.B. $e^z:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^k=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\ldots$

konvergente Reihe für alle $z\in\mathbb{C}$

gleiche Formeln wie in $\mathbb{R}$, z.B. $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

$$e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}\text{usw...}$$

$\phi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\phi} \underset{z=i\phi,\, z^k=i^k\phi^k}{=} 1+i\phi+\frac{1}{2}i^2\phi^2+\frac{1}{3!}i^3\phi^3+\frac{1}{4!}i^4\phi^4+\frac{1}{5!}i^5\phi^5+\frac{1}{6!}i^6\phi^6+\frac{1}{7!}i^7\phi^7=$$

$$=1+i\phi-\frac{1}{2}\phi^2-i\frac{1}{3!}\phi^3+\frac{1}{4!}\phi^4+i\cdot\frac{1}{5!}\phi^5-\frac{1}{6!}\phi^6-i\frac{1}{7!}\phi^7+\pm-\ldots=$$

$$=\underbrace{1-\frac{1}{2}\phi^2+\frac{1}{4!}\phi^4-\frac{1}{6!}\phi^6+-\ldots}_{\cos\phi}+i\underbrace{(\phi-\frac{1}{3!}\phi^3+\frac{1}{5!}\phi^5-\frac{1}{7!}\phi^7\pm\ldots)}_{\sin\phi}$$

Eulersche Formel $\boxed{e^{i\phi}=\cos\phi+i\sin\phi}$ $e^{i\pi}=-1$

$e^{i\pi}+1=0$

Exponentialdarstellung einer komplexen Zahl

$z=r(\cos\phi+i\sin\phi)=|z|\cdot e^{i\phi}$

$z_1 z_2=|z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i(\phi_1+\phi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\phi_1-\phi_2)}$

$z^n=|z|^n\cdot e^{in\phi}$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (alle $a_k \in \mathbb{C}$ genau n Nullstellen (Vielfachkeiten mitgezählt) (d.h. Zerfällt in ein Produkt von Linearfaktoren)

Satz: Hat p(x) nur reelle Koeffizienten a_k, so gilt $p(\lambda)=0 \Rightarrow p(\bar{\lambda})=0$ (d.h. Nullstellen treten in zueinander konjugiert komplexen Paaren auf)

Bew.: $p(\bar{\lambda})=\sum a_k \bar{\lambda}^k \underset{\bar{a}\bar{b}=\overline{ab}}{=} \sum a_k \overline{\lambda^k}$

$\underset{a_k=\bar{a}_k}{=} \sum \overline{a_k}\,\overline{\lambda^k}=\sum \overline{a_k \lambda^k} \underset{\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}}{=} \overline{\sum a_k \lambda^k}=\overline{p(\lambda)}$

Die Gleichung $z^n=1$

hat in $\mathbb{C}$ n verschiedene Lösungen (n-te Einheitswurzeln):

$\boxed{z_k:=e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad k=0,\ldots,n-1}$

weil $z_k^n=e^{ik2\pi}=1$

Diese z_k sind die Ecken eines dem Einheitskreis einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks

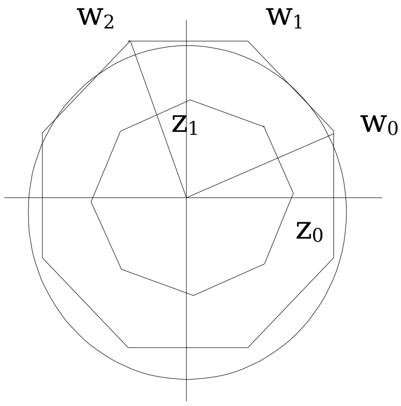
$c \in \mathbb{C}$ geg:

Lösungen von $w^n=c=r\cdot e^{i\phi}$

eine Lösung: $w_0=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{i\phi}{n}}$

alle Lösungen: $w_k=w_0\cdot z_k$ (z_k wie oben) k = 0, ..., n – 1

$w^8 = c$



3.2. Komplexwertige Funktionen in einer reellen Variablen

$z:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$z(t)=x(t)+iy(t)$

$x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt $\mathrm{Re}\, z=$ Realteil von z

$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt $\mathrm{In}\, z=$ Imaginärteil von z

Beispiel; $\lambda\in\mathbb{C}$ fest; $z(t)=e^{\lambda t}$

$\lambda=\alpha+i\beta;\ e^{\lambda t}=e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$

$\mathrm{Re}\, z(t)=e^{\alpha t}\cos\beta t;\ \mathrm{Im}\, z(t)=e^{\alpha t}\sin\beta t$

$$\dot z(t)=\frac{d}{dt}z(t):=\dot x(t)+\dot{i}\,\dot y(t)$$

$$\text{d.h.}:\mathrm{Re}\left(\frac{d}{dt}z(t)\right)=\frac{d}{dt}(\mathrm{Re}\, z(t))$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{d}{dt}t(t)\right)=\frac{d}{dt}(\mathrm{Im}\, z(t))$$

gängige Regeln bleiben erhalten, z.B. $\dot{(z_1+z_2)}=\dot z_1+\dot z_2,\ \dot{(cz)}=c\dot z$

$\dot{(z_1 z_2)}=\dot z_1 z_2+z_1\dot z_2,$ Quotientenregel...

$\lambda\in\mathbb{C}$ $\boxed{\frac{d}{dt}e^{\lambda t}=\lambda\cdot e^{\lambda t}}$ (nachrechnen)

$$\int(x(t)+i\,y(t))dt:=\int x(t)dt+i\int y(t)dt$$

$$\text{d.h.}\ \mathrm{Re}\int z(t)dt=\int \mathrm{Re}(z(t))dt\ldots\mathrm{Im}\ldots$$

<u>Anmerkung:</u> z.B. Berechnung von Integralen reeller Funktionen

Beisp.: $\underbrace{\int e^{\alpha t}(a\cos\beta t+b\cdot\sin\beta t)dt}_{\substack{Re(Ce^{\lambda t})\quad C=a-ib;\lambda=\alpha+i\beta \\ denn\,(a-ib)e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)}}\qquad \alpha,\beta,a,b\in\mathbb{R}$

$$Re\left(\int Ce^{\lambda t}dt\right)=Re\left(C\cdot\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\right)\overset{*}{=}$$

$$\frac{C}{\lambda}=\frac{a-ib}{\alpha+i\beta}\cdot\frac{\alpha-i\beta}{\alpha-i\beta}$$

$$\overset{*}{=}Re\left(\frac{a\alpha-b\beta-i(\alpha\beta-ba)}{\alpha^2+\beta^2}\overbrace{(\cos\beta t+i\cdot\sin\beta t)}^{e^{i\beta t}}\cdot e^{\alpha t}\right)=$$

$$=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}((a\alpha-b\beta)\cos\beta t+(a\beta-b\alpha)\sin\beta t)$$

3.3. Lineare Algebra mit komplexen Zahlen

Alles bisherige wie über $\mathbb{R}$

Reelle Matrizen sind wegen $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ auch komplexe Matrizen → komplexe EW, EV

Satz:

a) Ist λ ein komplexer EW einer reellen Matrix A, dann ist auch $\bar{\lambda}$ ein EW von A.

b) Ist $\underline{u}+i\underline{v}$ EV zu λ, dann ist $\underline{u}-i\underline{v}$ EV zu $\bar{\lambda}$

Beweis:

a) $p(\lambda)$ Polygon mit reeller Kraft

b)
$$\begin{array}{ll}
A(\underline{u}+i\underline{v})=(\alpha+i\beta)(\underline{u}+i\underline{v})\overset{!}{\Rightarrow} & A(\underline{u}-i\underline{v})=(\alpha-i\beta)(\underline{u}-i\underline{v}) \\
A\underline{u}+iA\underline{v}=\alpha\underline{u}-\beta\underline{v}+i(\alpha\underline{v}+\beta\underline{u}) & A\underline{u}-iA\underline{v}=\alpha\underline{u}-\beta\underline{v}-i(\beta\underline{u}+\alpha\underline{v}) \\
A\underline{u}=\alpha\underline{u}-\beta\underline{v},A\underline{v}=\alpha\underline{v}+\beta\underline{u} & A\underline{u}=\alpha\underline{u}-\beta\underline{v},A\underline{v}=\beta\underline{u}+\alpha\underline{v}
\end{array}$$

Beispiel:

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix};p(\lambda)=\lambda^4-1$$

$$\lambda_{1,2}=\pm1;\lambda_{3,4}=\pm i$$

$$E_{\lambda=1}:\begin{array}{cccc}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\1&0&0&-1\end{array}\;+\qquad\begin{array}{cccc}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&1&0&-1\end{array}\qquad\begin{array}{cccc}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{-1}\end{array}$$

$$x_4=t;x_3=t;x_2=t;x_1=t$$

$$E_{\lambda=1}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}\right\}\text{vgl. Bl. 1 Aufg. 4}$$

$$E_{\lambda=-1}: \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ (1 & 0 & 0 & 1) \end{matrix}$$

$x_4 = t; x_3 = -t; x_2 = t; x_1 = -t$

$$E_{\lambda=-1} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_{\lambda=i}: \begin{matrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \end{matrix} \qquad \cdot \frac{1}{i} (= -i)$$

(4. Zeile kann auch sofort weggelassen werden)

$$\begin{matrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & -i & 0 & -i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_4 = t \in \mathbb{C}$

$-i x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow -i x_3 = -x_4 \Rightarrow x_3 = -i x_4 = -it$

$-ix_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -ix_3 = -t; x_1 = -ix_2 = it$

$$E_{\lambda=i} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^4; E_{\lambda=-i} = \left\{ t \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Probe}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda \text{ EW zu A, dann ist } \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ EV zu } \lambda$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>weitere Beispiele:</u>

$$A=\begin{bmatrix}4 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix} EW, EV?$$

$$P(\lambda)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda & -4 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{bmatrix} \underset{1.\ \text{Zeile}}{=} (4-\lambda)\cdot\det\begin{bmatrix}2-\lambda & 1\\ 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}+4\cdot\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=(4-\lambda)\cdot[\underbrace{(2-\lambda)(4-\lambda)-2}_{\lambda^2-6\lambda+6}]+4(4-\lambda)=$$

$$=(4-\lambda)[\underbrace{\lambda^2-6\lambda+6+4}_{\lambda^2-6\lambda+10=0\Rightarrow\lambda_{2,3}=\frac{1}{2}(6\pm\sqrt{-4})=3\pm i}]$$

$\lambda_1=4$

$$E_{\lambda=4}:\begin{pmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

$x_3=t$

$2x_2=0\Rightarrow x_2=0$

$x_1+2x_2+x_3=0\Rightarrow x_1=-x_3=-t$

$$E_{\lambda=4}=\left\{t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\text{Probe}: A\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda=3+i}:\begin{pmatrix}1-i & -4 & 0\\ 1 & -1-i & 1\\ 0 & 2 & 1-i\end{pmatrix}$$

ohne Theorie: Zeilenvertauschung $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccc}1 & -1-i & 1\\ 0 & 2 & 1-i\\ 1-i & -4 & 0\\ \hline 1 & -1-i & 1\\ 0 & -2 & 1-i\\ 0 & -4-2i & -1+i\\ \hline 1 & -1-i & 1\\ 0 & 2 & 1-i\\ 0 & 0 & 0\end{array}$$

NR: $-4+(-1-i)(-1+i)=-2$

$x_3=t\in\mathbb{C}$

$2x_2+(1-i)x_3=0\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}(-1+i)t$

$x_1+(-1-i)x_2+x_3=0$

$\Rightarrow x_1=-(-1-i)\cdot\frac{1}{2}(-1+i)t-t=-2t$

$$E_{\lambda=3+i}=\left\{t\begin{pmatrix}-2\\ \frac{1}{2}(-1+i)\\ 1\end{pmatrix},t\in\mathbb{C}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-4\\ -1+i\\ 2\end{pmatrix};t\in\mathbb{C}\right\}$$

$$\text{Probe}:\begin{bmatrix}4&-4&0\\1&2&1\\0&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\-1+i\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16+4+4i\\-4-2+2i+2\\-2+2i+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12-4i\\-4+2i\\6+2i\end{bmatrix}\overset{!}{=}(3+i)\begin{pmatrix}-4\\-1+i\\2\end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda=3-i}=\left\{t\begin{pmatrix}-4\\ -1-i\\ 2\end{pmatrix};t\in\mathbb{C}\right\}$$

4. Differenzierung im $\mathbb{R}^n$

4.1. Partielle Ableitungen

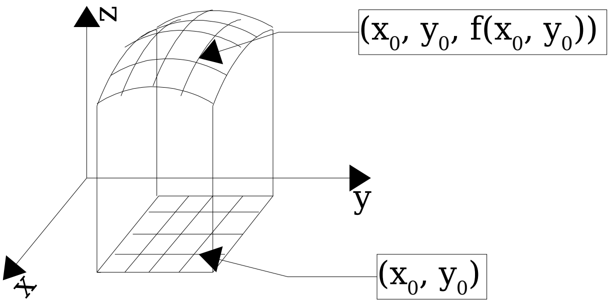
$D\subseteq\mathbb{R}^n;f:D\to\mathbb{R}$ Reelle Funktion in n Variablen; ordnet jedem $\underline{x}\in D$ (=Definitionsbereich) genau eine reelle Zahl $y=f(\underline{x})\in\mathbb{R}$ zu.

Schreibweisen: $y=f(\underline{x})=f(x_{1,}\ldots,x_n)$

anstatt $y=f(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix})$

für n = 2 oft auch z = f(x, y)

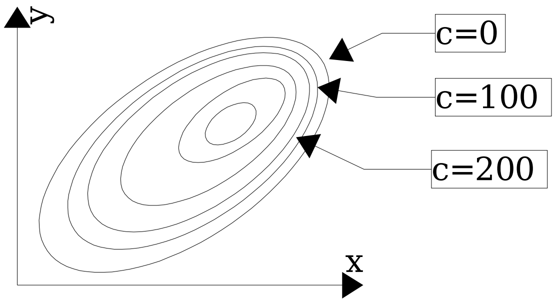
Graph von $f:\{(x,y,z):z=f(x,y)\}\subseteq\mathbb{R}^3$ ist eine Fläche $\subseteq\mathbb{R}^3$



Höhenlinien (Niveaulinien, Isoquadranten, ...)

$c\in\mathbb{R}$

$\{(x,y):f(x,y)=c\}$ Kurve $\subseteq\mathbb{R}^2$



<u>Def.:</u> $y=f(x_{1,}\ldots,x_n)$

Die partielle Ableitung $\frac{\delta f}{\delta x_i}$ erhält man, indem man x_i als Variable, alle anderen x_j als Konstante behandelt und ableitet.

Andere Schreibweisen: $f_{x_i}, f'_{x_i}, y_{x_i}, y'_{x_i}$

geometrische Deutung für z = f(x, y)

$\frac{\delta z}{\delta x}$ = Steigung der Tangente an den Graphen in x-Richtung

$\frac{\delta z}{\delta y}$ = Steigung der Tangente an den Graphen in y-Richtung

<u>Höhere partielle Ableitungen</u>

$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}(=z_{xx}=z''_{xx})$: 2 mal nach x ableiten

$\frac{\delta^2 z}{\delta y\,\delta x}(=z_{xy}=z''_{xy})$ zuerst nach x, dann nach y ableiten

usw...

<u>Satz von Schwarz:</u> Sind $\frac{\delta^2 t}{\delta x_i\,\delta x_j}$ und $\frac{\delta^2 t}{\delta x_j\,\delta x_i}$ stetig (Graph het keine „Sprünge“), so gilt $\boxed{\frac{\delta^2 f}{\delta x_i\,\delta x_j}=\frac{\delta^2 f}{\delta x_j\,\delta x_i}}$ $t_{x_i x_j}=f_{x_j x_i}$

<u>Beisp.:</u>

1. $f(\underline{x})=e^{x_1^3-3x_1}-x_2^2+x_2x_3-x_3^2+3x_3;\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$$\frac{\delta f}{\delta x_1}=e^{x_1^3-3x_1}\cdot(3x_1^2-3)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_2}=-2x_2+x_3$$

$$\frac{\delta f}{\delta x_3}=x_2-2x_3+3$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_1^2}=f_{x_1x_1}=e^{x_1^3-3x_1}\cdot 6x_1+e^{x_1^3-3x_1}\cdot(3x_1^2-3)\cdot(3x_1^2-3)=e^{x_1^3-3x_1}\cdot((3x_1^2-9)^2+6x_1)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_2\delta x_1}=f_{x_1x_2}=0=f_{x_2x_1}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_2^2}=f_{x_2x_2}=-2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_3\delta x_2}=1=\frac{\delta^2 f}{\delta x_2\delta x_3}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_3\delta x_1}=f_{x_3x_1}=0=f_{x_1x_3}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x_3^2}=-2$$

2. $f(x,y)=x^y$

$$\frac{\delta f}{\delta x}=yx^{y-1}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y}=x^y\cdot\ln x$$

$$f_{xx}=y(y-1)\cdot x^{y-2}$$

$$f_{xy}=1\cdot x^{y-1}+y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x$$

$$f_{yx}=y\cdot x^{y-1}\cdot\ln x+x^y\cdot\frac{1}{x}=f_{xy}$$

$$f_{yy}=x^y\cdot\ln x\cdot\ln x=x^y\cdot\ln^2 x$$

3. $z=x^2+\sin(xy)$

$$f_x=2x+y\cdot\cos(xy)$$

$$f_y=x\cdot\cos(xy)$$

$$f_{xx}=2-y^2\sin(xy)$$

$$f_{xy}=1\cdot\cos(xy)-\sin(xy)xy=f_{yx}$$

$$f_{yy}=-x^2\sin(xy)$$

$$\nabla z=\left(\frac{\delta z}{\delta x},\frac{\delta z}{\delta y}\right)=\text{Gradient von } z=\text{grad}\, z$$

$$\nabla y=\left(\frac{\delta y}{\delta x_1},\ldots,\frac{\delta y}{\delta x_n}\right)$$

4.2. Gradient, Richtungsableitung, Hessematrix, Funktionalmatrix (=Jacobimatrix)

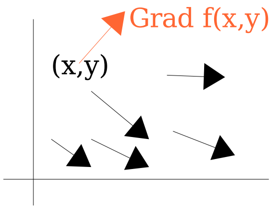
Def.: $D \subseteq \mathbb{R}^n ; f: D \to \mathbb{R}$

$$\operatorname{grad} f(\underline{x}) = \nabla f(\underline{x}) = f'(\underline{x}) := \left(\frac{\delta f}{\delta x_1}, \frac{\delta f}{\delta x_2}, \ldots, \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)$$

heißt Gradient von $\underline{f}$ (an der Stelle $\underline{x}$)

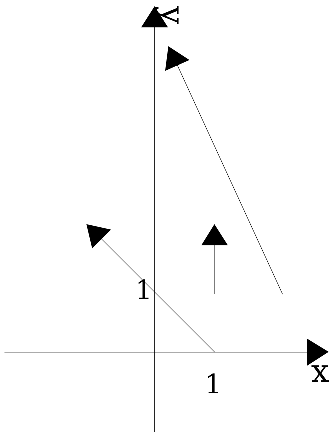
$(\nabla = \text{Nabla-Operator} = (\frac{\delta}{\delta x_1}, \ldots, \frac{\delta}{\delta x_n}))$

Bem.: $\operatorname{grad} f: D \to \mathbb{R}^n$ ist ein sogenanntes Vektorfeld



Beisp.: $f(x,y) = 2xy - x^2 ; f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f'(x,y) = \operatorname{grad} f(x,y) = (2y - 2x, 2x); \operatorname{grad} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$\operatorname{grad} f(1,0) = (-2,2)$

$\operatorname{grad} f(2,-1) = (-2,4)$

Richtungsableitung: $\underline{a} \in \mathbb{R}^n \quad \|\underline{a}\| (= |\vec{a}|) := \sqrt{\sum a_i^2} = \text{Länge von } \underline{a}$

Def.: $\frac{\delta f}{\delta \underline{a}} := \frac{1}{\|\underline{a}\|} \cdot f'(\underline{x}) \underset{\text{Skalarprod.}}{\cdot} \underline{a}$ heißt Richtungsableitung von f in Richtung $\underline{a} (\neq \underline{0})$ = Steigung der Tangente an den Graphen in Richtung $\underline{a}$.

Beispiel wie oben:

(x,y)=(1,2)

$\underline{a}$	$\frac{\delta f}{\delta a}(1,2)$
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 6\approx 2{,}683$
$\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$	$\frac{1}{10}\cdot 28=2{,}8$
$\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$	$\sqrt{8}\approx 2{,}828$

NR: $\frac{\delta f}{\delta \underline{a}}(1,2)=\frac{1}{\|\underline{a}\|}(2,2)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\frac{2}{\|\underline{a}\|}(a_1+a_2)$

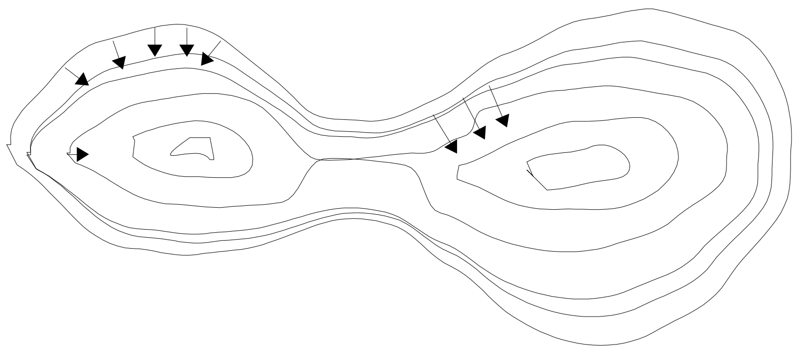
allgemein: für $\underline{a}=(\operatorname{grad} f(\underline{x}))^T$ ist

$$\frac{\delta f}{\delta \underline{a}}=\frac{1}{\|\operatorname{grad} f\|}\cdot(\operatorname{grad} f)\cdot(\operatorname{grad} f)^T=\frac{\|\operatorname{grad} f\|^2}{\|\operatorname{grad} f\|}=\|\operatorname{grad} f\|$$

Satz:

a) grad f zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs von $\underline{f}$ (dieser ist ||grad f||)

b) grad f steht senkrecht auf den Niveaulinien von $\underline{f}$ (Niveauflächen für n=3)



Bem.: a) liefert eine numerische Methode zum Auffinden lokaler Extema (Gradientenmethode) (Methode des steilsten Anstiegs / Abstiegs)

Tangentialebene

Vorbemerkung: „Einfachste“ Funktionen $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sind die sog. (affinen) linearen Funktionen: $T(\underline{x})=a_1x_1+\ldots a_nx_n+b=\underline{a}^T\cdot\underline{x}+b$ $\quad \underline{a}\in\mathbb{R}^{-}, b\in\mathbb{R}$
Graph für n=2 Ebene (sonst: „Hyperebene“)
$T(x,y)=ax+by+c(a,b,c\,\text{fest})$

Satz: $\underline{x}_0\in D$. In einer hinreichend kleinen Umgebung von $\underline{x}_0$ ist
$\boxed{f(\underline{x})\approx T(\underline{x}):=f(\underline{x}_0)+f'(\underline{x}_0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}_0)}$ Tangentialentwicklung von f bis zum linearen Term
Skalarprodukt
Der Graph von T ist die Tangential(hyper)ebene an den Graphen von f im Punkt $(\underline{x}_0\, f(x_0))\in\mathbb{R}^{n+1}$

Beispiel 1) Gesucht: Tangentialebene von $f(x,y)=x^2+2y^2-xy$ im Punkt $(1,1,f(1,1))$

$f'(x,y)=(2x-y,4y-x)$

$f(1,1)=2; f'(1,1)=(1,3)$

$T(x,y)=2+(1,3)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}=2+1\cdot(x-1)+3\cdot(y-1)=-2+x+3y$

Ebenengleichung $: z=-2+x+3y$

allgemein für n=2

$$\boxed{T(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

$f: D\to\mathbb{R}; D\subseteq\mathbb{R}^n$

Hessematrix $H_f(\underline{x})=(h_{ij}\cdot(\underline{x}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$

$h_{ij}(\underline{x})=\frac{\delta^2 t}{\delta x_i\,\delta x_j}$

symmetrisch wg. Schwartz   Beispiel später

$$H(x,y)=\begin{pmatrix}y(y-1)\cdot x^{y-2} & yx^{-1}\ln x+x^{y-1}\\ yx^{-1}\ln x+x^{y-1} & x^4\cdot\ln^2 x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta y\,\delta x}\\ \frac{\delta^2 f}{\delta x\,\delta y} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\end{pmatrix}$$

Taylerentwicklung von $f: D\to\mathbb{R}, D\subseteq\mathbb{R}^n$ bis zum quadratischen Term:

$f(\underline{x})\approx f(\underline{x_0})+f'(\underline{x_0})(\underline{x}-\underline{x_0})+\frac{1}{2!}(\underline{x}-\underline{x_0})^T H(\underline{x_0})(\underline{x}-\underline{x_0})$

$(f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 \text{für } n=1)$ $H(\underline{x})\triangleq f''(\underline{x})$

Beispiel: $f(x_1,x_2,x_3)=e^{x_1^3-3x_1}-x_2^2+x_2x_3-x_3^2+3x_3;\quad \underline{x}_0=\underline{0}=(0,0,0)$

$$f(\underline{x})\approx 1+(e^{x_1^3-3x_1}(3x_1^2-3),-2x_2+x_3,x_2-2x_3+3)\Big|_{\underline{x}=\underline{0}}\cdot\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)+$$

(ausgewertet an d. Stelle $\underline{x}_0=\underline{0}$)

$$=\frac{1}{2}(x_1-0,x_2-0,x_3-0)\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_1^3-3x_1}\cdot((3x_1^2-3)^2+6x_1) & 0 & 0\\ 0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}}_{\text{symmetrisch}}\Bigg|_{\underline{x}=\underline{0}}\cdot\begin{pmatrix}x_1-0\\x_2-0\\x_3-0\end{pmatrix}=$$

$$=1+(-3,0,3)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}(x_1,x_2,x_3)\cdot\begin{pmatrix}9&0&0\\0&-2&1\\0&1&-2\end{pmatrix}\overset{*}{=}$$

$$\text{NR}:\underline{x}^T\cdot(a_{ij})\underline{x}=(x_1\dots x_n)\cdot\begin{pmatrix}\sum_j a_1 j x_j\\ \sum_j a_2 j x_i\\ \vdots\\ \sum_j a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\sum_i x_i\Big(\sum_j a_{ij}x_j\Big)=\sum_{i,j}a_{ij}\cdot x_i x_j$$

$$\overset{*}{=}\underbrace{\underbrace{1-3x_1+3x_3}_{\text{linear}}+\frac{1}{2}(9x_1^2-2x_2^2+2x_2x_3-2x_3^2)}_{\text{quadratisch}}$$

Funktionalmatrix (Jacobimatrix)

$D\subseteq\mathbb{R}^n;\ \underline{f}:D\to\mathbb{R}^m$ (vektorwertig); $\underline{f}(\underline{x})=\begin{pmatrix}f_1(\underline{x})\\ \vdots\\ f_m(\underline{x})\end{pmatrix}$ skalarwertig

$J_{\underline{f}}(\underline{x})=D_{\underline{f}}(\underline{x})=\underline{f}'(\underline{x}):=\begin{pmatrix}f_1'(\underline{x})\\ \vdots\\ f_m'(\underline{x})\end{pmatrix}$ m x n-Matrix $(f_{ij}(\underline{x}));\ f_{ij}(\underline{x})=\dfrac{\delta f_i}{\delta x_j}(\underline{x})$

Bemerkung: $f:D\to\mathbb{R},\ D\subseteq\mathbb{R}^n$

$\underline{g}(\underline{x}):=f'(\underline{x})=\operatorname{grad} f(\underline{x}),\ \underline{g}:D\to\mathbb{R}^n;\ \underline{g}'(\underline{x})=f''(\underline{x})$

Beispiel zur Funktionalmatrix:

$$\underline{f}(x,y)=\begin{pmatrix}x\cdot\cos y\\ x\cdot\sin y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(x,y)\\ f_2(x,y)\end{pmatrix}$$

Funktionalmatrix: $\underline{f}'(x,y)=\begin{pmatrix}\cos y & -x\sin y\\ \sin y & x\cos y\end{pmatrix}$ überlicherweise:

$f(r,\phi)=\begin{pmatrix}r\cdot\cos\phi\\ r\cdot\sin\phi\end{pmatrix}$ $\leftarrow$ kartesische $\leftarrow$ Koordinaten

$\uparrow\ \uparrow$

Polarkoordinaten

4.3. Lokale Extrema

$f: D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$

Notwendige Bedingung dafür, daß in $\underline{x}_o$ (n=2):(x_0, y_0)) ein lokales Extremum vorliegt:

$\operatorname{grad} f(\underline{x}_0) = f'(\underline{x}_0) = \underline{0}$

Solche Punkte $\underline{x}_0$ heißen <u>stationäre Punkte</u> von f (Kandidaten)

Hessematrix von f ≙ $f''(\underline{x})$ entscheidet.

Es gilt:

<u>Satz:</u> Ist $\underline{x}_0$ stationärer Punkt und H($\underline{x}_0$) positiv definit ⇒ lok. Min. in $\underline{x}_0$
H($\underline{x}_0$) negativ definit ⇒ lok. Max in $\underline{x}_0$
H($\underline{x}_0$) indefinit ⇒ Sattelpunkt bei $\underline{x}_0$

<u>Def.:</u> Eine reelle n x n-Matrix A = A^T heißt <u>positiv definit</u> (<u>p.d.</u>) :⇔ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \underline{x} \neq \underline{0}$ ist die quadratische Form $q(\underline{x}) := \underbrace{\underline{x}^T A \underline{x}}_{\in \mathbb{R}} > 0$

<u>negativ definit</u> (n.d.) : ⇔ $\forall \underline{x} \neq \underline{0}\, q(\underline{x}) < 0$ $(\Leftrightarrow -A \text{ p.d.})$
<u>indefinit</u> : ⇔ Es gibt $\underline{x}$, $\underline{y}$ sodaß $q(\underline{x}) < 0 ; q(\underline{y}) > 0$

<u>Definitheitskriterien</u> für eine reelle n x n-Matrix A = A^T:

<u>Satz 1:</u> n=2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{p.d.} \Leftrightarrow \det A > 0 \,\text{und}\, a > 0$$
$$\text{n.d.} \Leftrightarrow \det A > 0 \,\text{und}\, a < 0$$
$$\text{indef.} \Leftrightarrow \det A < 0$$

<u>Satz 2:</u> A p.d. ⇔ alle Hauptunterdeterminanten > 0

A n.d. ⇔ alle Hauptunterdeterminanten mit wechselnden Vorzeichen, beginnend mit a_{11} < 0

Hauptunderdet.: $a_{11}, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ldots$

<u>Satz 3:</u> A p.d. ⇔ Alle EW > 0

A n.d. ⇔ Alle EW < 0

indef ⇔ Es gilt EW < 0 und EW > 0

<u>Bem.:</u> $n=2$
$$\det A > 0 \,\text{und}\, a > 0 \Leftrightarrow \det A > 0 \,\text{und}\, c > 0$$
$$\det A > 0 \,\text{und}\, a < 0 \Leftrightarrow \det A > 0 \,\text{und}\, c < 0$$

Begründung:
$\det A = ac - b^2 > 0 \Rightarrow$ a und c haben das gleiche Vorzeichen ❑

<u>Beisp.:</u>

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^3 - 3x_1} - x_2^2 + x_2 x_3 - x_3^2 + 3x_3$$

$$f'(\underline{x}) = \underline{0} \Leftrightarrow \frac{\delta f}{\delta x_1} = 0; \frac{\delta f}{\delta x_2} = 0; \frac{\delta f}{\delta x_3} = 0 \rightarrow 3\,\text{Gleichungen} \in x_{1,}\, x_{2,}\, x_3$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & x_1^3 - 3x_1 \cdot (3x_1^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow 3x_1^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_1 = \pm 1 \\ \text{II)} & \left.\begin{array}{l} -2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 3 = 0 \end{array}\right\} x_2 = 1;\, x_3 = 2 \\ \text{III)} & \end{array}\right\} 2\,\text{stat. Punkte}: (1,1,2); (-1,1,2)$$

$$H(\underline{x}) = \begin{bmatrix} e^{x_1^3 - 3x_1} \cdot [(3x_1^3 - 3)^2 + 6x_1] & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}; H(1,1,2) = \begin{bmatrix} e^{-2} \cdot 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

EW von $H(1,1,2)$

$$\det \begin{bmatrix} e^{-2} \cdot 6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (e^{-2} \cdot 6 - \lambda)[(2+\lambda)^2 - 1]; \lambda_1 = e^{-2} \cdot 6; \lambda_2 = -1; \lambda_3 = -3$$

$$\overset{\text{Satz 3}}{\Rightarrow} H\,\text{indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt bei } (1,1,2)$$

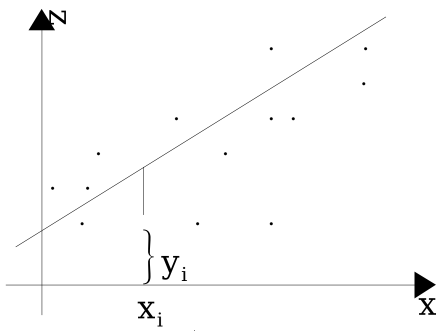
$$H(-1,1,2) = \begin{bmatrix} -e^{-2} \cdot 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{mit Satz 2 (Jacobi) Hauptunterdet.}: \underbrace{-e^{-2} \cdot 6}_{<0}; \underbrace{12 \cdot e^{-2}}_{>0}; \underbrace{-e^{-2} \cdot 6 \cdot (4-1)}_{<0}$$

$$\Rightarrow H\,\text{n.d.} \Rightarrow \text{lokales Max. bei } (-1,1,2)$$

4.4. Eine Anwendung

Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate und Gauss)



Meßwerte

x_0	$x_1 \;\dots\; x_m$
y_0	$y_1 \;\dots\; y_m$

m + 1 „Messungen“

Ausgleichungsgerade (Regressionsgerade) $y = ax + b$

a, b so bestimmen, daß Σ Fehlerquote $\rightarrow$ min

$$\sum_i (ax_i+b-y_i)^2 =: \phi(a,b)$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta a} = \sum_i 2(ax_i+b-y_i)\cdot x_i = 0$$

$$\sum (ax_i^2+bx_i-y_i x_i)=0$$

$$\mathrm{I})\, a\sum x_i^2 + b\sum x_i = \sum x_i y_i$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta b} = \sum 2(ax_i+b-y_i)=0$$

$$\mathrm{II})\, a\sum x_i + (m+1)\cdot b = \sum y_i$$

$$\begin{matrix}\rightarrow \mathrm{II})\\ \rightarrow \mathrm{I})\end{matrix}\begin{pmatrix}\sum x_i & m+1\\ \sum x_i^2 & \sum x_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum y_i\\ \sum x_i y_i\end{pmatrix} \qquad \mathrm{LGS} \in \mathrm{den\ Unbekannten}\ a,b$$

<u>Beisp.:</u>

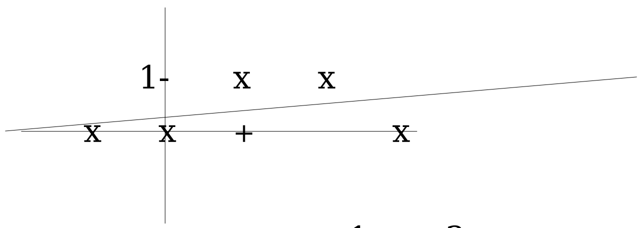
x_i	-1	0	1	2	3	5
y_i	0	0	1	1	0	2
x_i^2	1	0	1	4	9	15
$x_i\, y_i$	0	0	1	2	0	3

$$\begin{pmatrix}5 & 5\\ 15 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

Cramer:

$$a = \frac{\det\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 5\end{pmatrix}}{-50} = \frac{1}{10}$$

$$b = \frac{\det\begin{bmatrix}5 & 2\\ 15 & 3\end{bmatrix}}{-50} = \frac{3}{10}$$

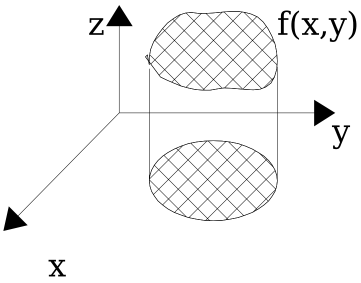


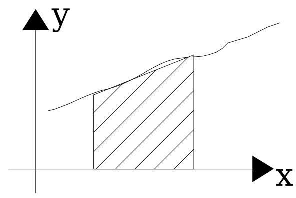
<u>Ausgleichsgerade:</u> $y = \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}$

<u>5. Mehrfachintegrale</u>

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt; $f: G \rightarrow \mathbb{R}$

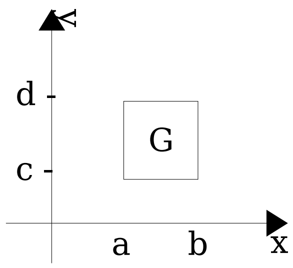
$\iint_G f(x,y)dG$:= Volumen des „Zylinders“ mit Grundfläche G und dem Graphen von f als „Deckel“



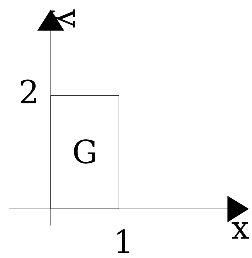


$$\text{Fläche}=\int_a^b f(x)dx$$

a) einfachster Fall: $G\,\text{Rechteck}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: a\le x\le b; c\le y\le d\}=[a,b]x[x,d]$



$$\iint_G f(x,y)dG=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$



<u>Beispiel</u>: $f(x,y)=x^2+y^2, G=[0,1]x[0,2]$

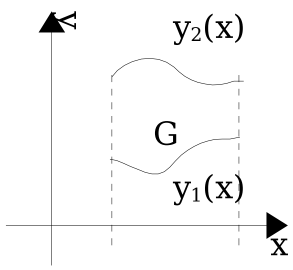
$$\int_0^1\left[\int_0^2 (x^2+y^2)dy\right]dx=\int_0^1\left(\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=2}\right)dx$$

$$x^2+y^2=c$$

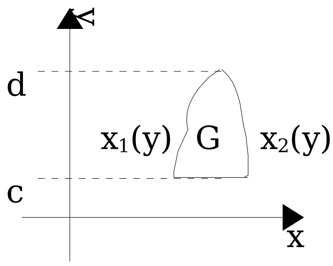
$$\int_0^2\left(\int_0^1 (x^2+y^2)dx\right)dy=\int_0^2\left(\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=0}^{x=1}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2\right)dy=$$

$$=\left[\frac{1}{3}y+\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=\frac{10}{3}$$

b) G ist ein sog. <u>Normalgebiet</u>

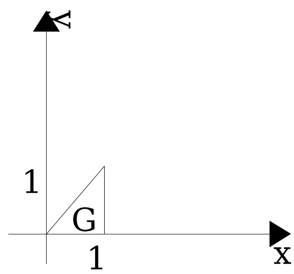


oder



$$\boxed{\iint_G f(x,y)dG=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right)dy}$$

Beisp. 1:



$$G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1; 0\le y\le x\}$$

$$f(x,y)=x\cdot\sin y$$

$$1.\; y_1(x)=0,\; y_2(x)=x$$

$$\int_0^1\int_0^x x\cdot\sin y\,dy\,dx=$$

Partielle Integration
≈ 0,118..

$$=\int_0^1 ([-x\cos y]_{y=x}^{y=0})\,dx=\int_0^1(-x\cos x+x)\,dx=[-x\sin x-\cos x+\frac{x^2}{2}]_0^1$$

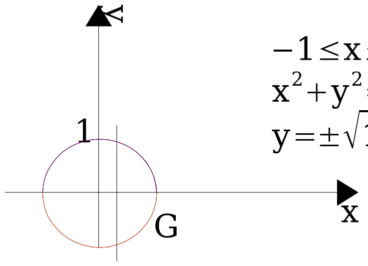
$$2.\; c=0; d=1$$

$$x_1(y)=y; x_1(y)=1$$

$$\int_0^1\int_y^1 x\sin y\,dx\,dy=\int_0^1([\frac{x^2}{2}\sin y]_{x=1}^{x=y})\,dy=\int_0^1(\frac{1}{2}\sin y-\frac{y^2}{2}\sin y)\,dy=\ldots\text{gleiches Ergebnis}$$

<u>Beisp. 2:</u> G = Einheitskreisscheibe EName [Bed.] / Aktion

$$\iint_G 1\,dG$$



$$-1\le x\le 1$$

$$x^2+y^2=1; y^2=1-x^2$$

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

$$y_1(x)=-\sqrt{1-x^2}$$

$$y_2(x)=\sqrt{1-x^2}$$

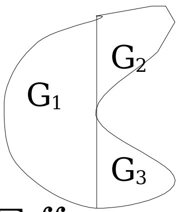
$$\overset{*}{=}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} dy\,dx=\int_{-1}^{1}([y]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}})\,dx=\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$\underset{FS}{=}[x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x]_{-1}^{1}=$$

$$=\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}}-\underbrace{\arcsin(-1)}_{-\frac{\pi}{2}}=\pi$$

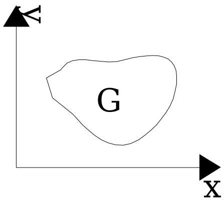
<u>Bem.:</u> $\iint_G dG=\text{Flächeninhalt von } G$

<u>Beisp. 3:</u> G kein Normalgebiet → aufteilen



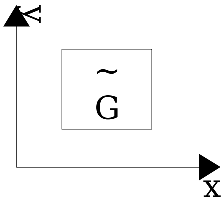
$$\iint_G=\sum\iint_{G_i}$$

Überlegung zu Polarkoordinaten



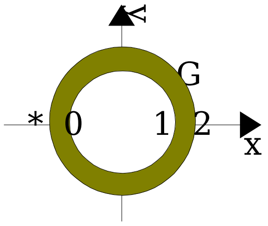
$x = r \cdot \cos\phi$

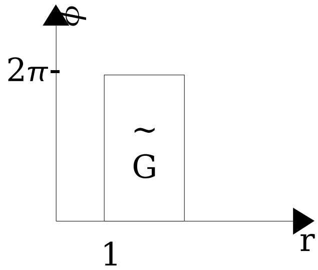
$y = r \cdot \sin\phi$



$\tilde{G}$ ist das Gebiet G, dargestellt in der (r, ϕ)-Ebene

z.B.

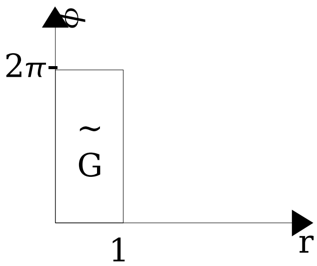




$$\iint_G f(x,y)\,dG = \iint_{\tilde{G}} \underbrace{f(r\cos\phi, r\sin\phi)\cdot r}_{\text{Funktion von r und }\phi}\, d\tilde{G}$$

nochmal Beispiel 2:

G = Einheitskreisscheibe



$$\iint_G 1\,dG = \iint_G r\,dG = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\cdot dx\,dy = \int_0^1 [r\phi]_0^{\phi=2\pi}\,dr = \int_0^1 2\pi r\,dr = [\pi r^2]_0^1 = \pi$$

6. Stammfunktionen

Geg.: Vektorfeld $\underline{f}: G \to \mathbb{R}^n; G \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\underline{f}$ vektorwertig)

Ges.: $q = G \to \mathbb{R}$ mit $\phi' = \underline{f}$ (d.h. $\operatorname{grad}\phi = \underline{f}$) (ϕ skalarwertig)

genauer $\frac{\delta\phi}{\delta x_1} = f_1(\underline{x}); \frac{\delta\phi}{\delta x_2} = f_2(\underline{x}); \ldots; \frac{\delta\phi}{\delta x_n} = f_n(\underline{x})$, wobei $\underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{bmatrix}$

Def.: Ein solches ϕ heißt dann Stammfunktion (oder Potential) von $\underline{f}$ (bis auf Konstante eindeutig)

Notwendige Bedingung für die Existenz: $\boxed{\frac{\delta f_i}{\delta x_j} = \frac{\delta f_j}{\delta x_i}}$ für alle i, j

Integrabilitätsbedinungen

Begründung: Satz von Schwartz, angewandt auf ϕ: $\frac{\delta^2 \phi}{\delta x_i \delta x_j} = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x_j \delta x_i}$

$= \frac{\delta f_j}{\delta x_i} \qquad = \frac{\delta f_i}{\delta x_j}$

Funktionalmatrix von $\underline{f}$ = Hessematrix von ϕ, daher symmetrisch

$$n=2, \underline{f}(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{\delta f_2}{\delta x}}$$

$$n=3; \frac{\delta f_1}{\delta x_2} = \frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_3} = \frac{\delta f_3}{\delta x_1}$$

$$\frac{\delta f_2}{\delta x_3} = \frac{\delta f_3}{\delta x_2}$$

$$\operatorname{rot} \underline{f} = \text{Rotation von } \underline{f} := \nabla \times \underline{f} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x_1} \\ \frac{\delta}{\delta x_2} \\ \frac{\delta}{\delta x_3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_3}{\delta x_2} = \frac{\delta f_2}{\delta x_3} \\ \frac{\delta f_1}{\delta x_3} = \frac{\delta f_3}{\delta x_1} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} = \frac{\delta f_1}{\delta x_2} \end{bmatrix}$$

Integralbedingungen ⇔ rot $\underline{f}$ = $\underline{0}$

<u>Beispiel:</u>

$$\underline{f}(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x-y^2} - 1 \\ -2ye^{x-y^2} + 4y \end{bmatrix}, \text{gesucht } \phi(x,y) \text{ mit}$$

$$\text{I)} \frac{\delta \phi}{\delta x} = e^{x-y^2} - 1$$

$$\text{II)} \frac{\delta \phi}{\delta y} = -2ye^{x-y^2} + 4y$$

$$(\text{Integrabilitätsbedingungen}: \frac{\delta f x}{\delta y} = e^{x-y^2} \cdot (-2y) = \frac{\delta f_2}{\delta x})$$

$$\text{I)} \phi(x,y) = \int (e^{x-y^2} - 1) dx = e^{x-y^2} - x + c(y)$$

$$\text{II)} e^{x-y^2}(-2y) + c'(y) = (-2y)e^{x-y^2} + 4y \Rightarrow c(y) = 4y$$ darf nur noch von y abhängen

$$\Rightarrow c(y) = 2y^2 + d$$

$$\Rightarrow \phi(x,y) = c^{x-y^2} - x + 2y^2 + d$$

<u>weiteres Beispiel:</u>

$$\underline{f}(\underline{x})=\begin{bmatrix}2x_1\cos(x_2x_3)\\ -x_1^2x_3\sin(x_2x_3)+x_3e^{x_2x_3}\\ -x_1^2x_2\sin(x_2x_3)+x_2e^{x_2x_3}+4x_3^3\end{bmatrix}$$

Integrabilitätsbedingungen :

$$\frac{\delta f_1}{\delta x_2}=-2x_1x_3\sin(x_2x_3)=\frac{\delta f_2}{\delta x_1}$$

$$\frac{\delta f_3}{\delta x_1}=-2x_1x_2\sin(x_2x_3)=\frac{\delta f_1}{\delta x_3}$$

$$\frac{\delta f_3}{\delta x_2}=-x_1^2\sin(x_2x_3)-x_1^2x_2\cos(x_2x_3)x_3+e^{x_2x_3}+x_2e^{x_2x_3}x_3=\frac{\delta f_2}{\delta x_3}$$

$$\text{I)}\frac{\delta\phi}{\delta x_1}=2x_1\cos(x_2x_3)$$

$$\text{II)}\frac{\delta\phi}{\delta x_2}=-x_1^2x_3\sin(x_2\cdot x_3)+x_3e^{x_2x_3}$$

$$\text{III)}\frac{\delta\phi}{\delta x_3}-x_1^2x_2\sin(x_2x_3)+x_2e^{x_2x_3}+4x_3^3$$

aus I) $\phi(x_{1,}x_{2,}x_3)=\int 2x_1\cos(x_2x_3)dx_1=x_1^2\cos(x_2x_3)+c(x_{2,}x_3)$

aus II) $\frac{\delta\phi}{\delta x_2}=-x_1^2x_3\sin(x_2x_3)+\frac{\delta c}{\delta x_2}=-x_1^2x_3\sin(x_2x_3)+x_3e^{x_2x_3}$

$$\Rightarrow\frac{\delta c}{\delta x_2}=x_3e^{x_2x_3}$$

$$\Rightarrow c(x_{2,}x_3)=\int x_3e^{x_2x_3}+d(x_3)$$

oben einsetzen liefert

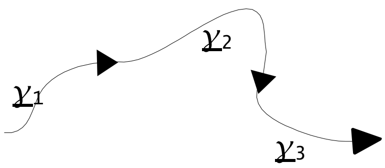
$$\phi(x_{1,}x_{2,}x_3)=x_1^2\cos(x_2x_3)+e^{x_2x_3}+d(x_3)$$

in III) $\frac{\delta\phi}{\delta x_3}=x_1^2\sin(x_2x_3)x_2+e^{x_2x_3}x_2+d'(x_3)=-x_1^2x_2\sin(x_2x_3)+x_2e^{x_2x_3}+4x_3^3$

$$\Rightarrow d'(x_3)=4x_3^3$$

$\Rightarrow d(x_3)=x_3^4$ einsetzen $\phi(\underline{x})=x_1^2\cos(x_2x_3)+e^{x_2x_3}+x_3^4$

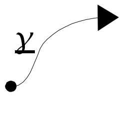
<u>Satz:</u>

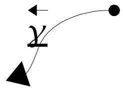


$$\underline{\gamma}=\underline{\gamma}_1+\underline{\gamma}_3+\dots$$

$$\int_{\underline{\gamma}}\underline{f}\,d\underline{\gamma}=\sum_i\int_{\gamma_i}\underline{f}\,d\underline{\gamma}_i$$

$\overleftarrow{\underline{\gamma}}=\underline{\gamma}$ rückwärts





$$\int_{\overleftarrow{\underline{\gamma}}}\underline{f}\,d\overleftarrow{\underline{\gamma}}=-\int_{\underline{\gamma}}\underline{f}\,d\underline{\gamma}$$

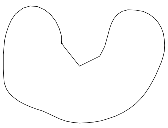
Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion (=Potential)

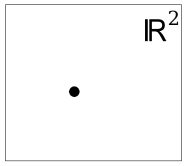
$\phi: D \to \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{R}^n$

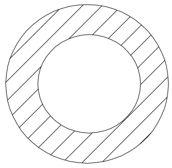
von einem gegebenen Vektorfeld $\underline{f}: D \to \mathbb{R}^n$

<u>Satz:</u> Ist D einfach zusammenhängend, dann gilt
$\underline{f}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen ⇔ $\underline{f}$ hat ein Potential $\phi: D \to \mathbb{R}$

<u>Def.:</u> (grob) $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt <u>einfach zusammenhängend</u>, wenn jede geschlossene Kurve in D sich „auf einen Punkt zusammenziehen läßt“, ohne dabei D zu verlassen.
Im $\mathbb{R}^2$ sind die Gebiete „ohne Löcher“

 , $\mathbb{R}^2$, Halbebenen

nicht einfach zusammenhängend: 



in $\mathbb{R}^3$: Kugeln, $\mathbb{R}^3$
endlich viele Löcher erlaubt
nicht einfach zusammenhängend:
$\mathbb{R}^3$ \ Gerade
$\mathbb{R}^3$ \ Kreis
Torus (Rettungsring)

<u>Satz:</u> Hat $\underline{f}: D \to \mathbb{R}^n, D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Potential $\phi: D \to \mathbb{R}$ und verläuft $\underline{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ganz in D (also $\underline{\gamma}: [a,b] \to D$), so gilt

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{f}\, d\underline{\gamma} = \phi(\underbrace{\underline{\gamma}(b)}_{\text{Endpkt.}}) - \phi(\underbrace{\underline{\gamma}(a)}_{\text{Anfangspkt.}})$$

Insbesondere ist dieses Integral <u>wegunabhängig</u>, und:
Ist $\underline{\gamma}$ geschlossen (d.h. $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$), so ist $\oint_{\underline{\gamma}} \underline{f}\, d\underline{\gamma}$ (Ringintegral, Umlaufintegral) = 0

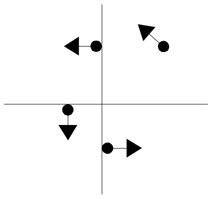
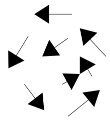
<u>Beispiel:</u>

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

D nicht einfach zusammenhängend!

$$\underline{f}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

Vektorfeld des magn. Wirbels

Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\frac{\delta f_1}{\delta y} = \frac{(x^2+y^2)\cdot(-1) - 2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}; \frac{\delta f_2}{\delta x} = \frac{(x^2+y^2)\cdot 1 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\delta f_1}{\delta y}$$

Stammfunktion ausrechnen:

I) $\frac{\delta\phi}{\delta x}=\frac{-y}{x^2+y^2}$

II) $\frac{\delta\phi}{\delta y}=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\phi=\int\frac{-y}{x^2+y^2}dx \underset{\frac{d}{dt}\arctan t=\frac{1}{1+t^2}}{=} \int\frac{-y}{y^2((\frac{x}{y})^2+1)}dx=-\frac{1}{y}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}dx \underset{t=\frac{x}{y},\frac{dt}{dx}=\frac{1}{y},dx=y\,dt}{=}$$

$$=-\frac{1}{y}\int\frac{1}{1-t^2}y\,dt=\frac{-\int 1}{1+t^2}dt=-\arctan t=-\arctan\frac{x}{y}+c(y)$$

in II) $-\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot(\frac{-x}{y^2})+c'(y)=\frac{x}{x^2+y^2} \quad \rightarrow c'(y)=0$

Eine Stammfunktion $\phi(x,y)=-\arctan\frac{x}{y}$ $\boxed{y\neq 0}$

Beispiel:

$$\oint_{\underline{\gamma}=\text{Einheitskreis}} \underline{t}\,d\underline{\gamma}$$

$\underline{\gamma}:[0,2\pi]\rightarrow D$

$\underline{\gamma}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t\\\sin t\end{bmatrix}$

$$\int_0^{2\pi}\begin{bmatrix}f_1(x(t),y(t))\\f_2(x(t),y(t))\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\end{bmatrix}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\cos^2 t+\sin^2 t}\begin{bmatrix}-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\sin t\\\cos t\end{bmatrix}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}1\,dt=2\pi \qquad \text{Grund: G nicht einfach zusammenhängend !}$$

$\underline{f}$ wie oben;

$\underline{\gamma_1}:[1,2]\rightarrow G,$

$\underline{\gamma_1}(t)=\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}$

Jetzt gilt $\int_{\gamma_1}\underline{f}\,d\underline{\gamma_1}=\phi(\text{Endpkt.})-\phi(\text{Anfangspkt.})$

LS: $\int_1^2\frac{1}{t^2+1}\begin{bmatrix}-1\\t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}dt=\int_1^2\frac{-1}{t^2}+1\,dt=-[\arctan t]_1^2=\arctan 1-\arctan 2$

RS: $\phi(2,1)-\phi(1,1)=-\arctan 2+\arctan 1$

7. (Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

7.1. Lineare DGL erster Ordnung

$y'+a(x)y=b(x), \quad a(x), b(x)$ gegeben, gesucht y(y)

<u>Lösung:</u> Ist A(x) eine Stammfunktion von a(x), dann ist

$$\boxed{y=e^{-A(x)}\cdot\int b(x)\cdot e^{A(x)}dx}$$

<u>Beispiele:</u>

1) $y'+\frac{1}{x}y=x^3; \quad x>0$

$$a(x)=\frac{1}{x}; A(x)=\ln x$$

$$y=\underbrace{e^{-\ln x}}_{=\frac{1}{x}}\cdot\int x^3\cdot\underbrace{e^{\ln x}}_{=x}dx=\frac{1}{x}\int x^4 dx=\frac{1}{x}(\frac{x^5}{5}+c)=\frac{x^4}{5}+\frac{c}{x}$$

(Bem.: Lösung eindeutig durch sog. Anfangswerte: $y(x_0)=y_0$)

RL-Stromkreis
Geg.: Konstante L, R,
$U=U(t)=U_0\cos\omega t \quad (\text{Wechselspannung})$
Ges.: $I=I(t)\,\text{aus der DGL}$

$$L\,\text{codt}\,\dot{I}+R\cdot I=U_0\cos\omega t$$

$$\dot{I}+\frac{R}{L}\cdot I=\frac{U_0}{L}\cos\omega t$$

$$I=e^{\frac{-R}{L}t}\cdot\frac{U_0}{L}\int\cos\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}dt \underset{\text{2x partiell Int oder FS}}{=}$$

$$=e^{-\frac{R}{L}t}\left[\frac{U_0}{L}\frac{1}{\omega^2+(\frac{R}{L})^2}e^{\frac{R}{L}t}(\omega\sin\omega t+\frac{}{L}\cos\omega t)+C\right]=$$

$$=\frac{U_0}{\omega^2L^2+R^2}(\omega L\sin\omega t+R\cos\omega t)+C\text{cdot}\,e^{-\frac{}{L}t}; \quad C\in\mathbb{R}$$

7.2. Trennbare DGL

$y'=f(x)\cdot g(y)$

Methode: „Trennung der Variablen“: $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y); \quad \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$

anschließend nach y auflösen

[singuläre Lösungen: Ist g(a) = 0, dann ist auch y(x) = a = const. eine Lösung.]

Beispiel: $1+y^2-xy'=0 \quad (\text{nicht linear})$

$$xy'=1+y^2, \quad y'=\frac{1}{x}\cdot(1+y^2)=\frac{dy}{dx}$$

$$\int\frac{1}{1+y^2}dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\underset{\text{DGL}}{\arctan} y \underset{\rightarrow}{=} \underset{\text{GL}}{\ln|x|}+C; \quad y=\tan(\ln|x|+C)$$

7.3. DGL vom Typ y'' + ay' + by = 0; a, b ∈ ℝ

Char. Polynom: $p(\lambda)=\lambda^2+a\lambda+b$

1) λ_1,λ_2 verschiedene reelle Nullstellen von $p(\lambda)$
   $\Rightarrow y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}; \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

2) λ_1 doppelte reelle Nullstelle
   $\Rightarrow y=(c_1+c_2x)e^{\lambda_1 x}; \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

3) $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$
   $\Rightarrow y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x); \quad c_{1,}c_2\in\mathbb{R}$

Beispiele:

1) $y''-y'-2y=0$

   $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2=0; \quad \lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{9}); \quad \lambda_1=2; \quad \lambda_2=-1$

   $y=c_1e^2x+c_2e^{-x}; \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

2) $y''+2y'+y=0$

   $p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2; \quad \lambda_1=-1 \text{ doppelt}$

   $y=(c_1+c_2x)e^{-x}$

   Probe: $y'=e^{-x}(c_2-c_1-c_2x); \quad y''=e^{-x}(-c_2+c_1-c_2+c_2x)$

   einsetzen $e^{-x}(c_1-2c_2+c_2x+2c_2-2c_1-2c_2x+c_1+c_2x)=0$

3) $y''+y=0; \quad p(\lambda)=\lambda^2+1; \quad \lambda_{1,2}=\pm i; \quad y \underset{\alpha=0;\beta=1}{=} y=c_1\cos x+c_2\sin x$