Mathematik 2

1. Mengenalgebra

1.1. Grundbegriffe

„Mengendefinition“ nach G. Cantor:

> „Eine Menge ist eine Zusammensetzung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten / Elementen unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“

Notation: Sei M eine Menge

(I) $a \in M$ bedeutet „a ist Element von M“.
(II) $a \notin M$ bedeutet „a ist nicht Element von M“.

Aufzählende Form

$M=\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$

$M=\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

Beispiel:

$\mathbb{N}=\{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_0=\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$=Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$=Menge der reellen Zahlen

Beschreibende Form

$M=\{x|E(x)\}$ = Menge aller x mit der Eigenschaft E(x)

Beispiel:

$\mathbb{N}_0=\{x|x\in\mathbb{N} \text{ oder } x=0\}$

$$\mathbb{R}_0^+=\{x|\underbrace{\overbrace{x\in\mathbb{R}}^{A_1(x)} \text{ und } \overbrace{x\geq 0}^{A_2(x)}}_{\text{Aussageform}}\}$$

Exkurs: Aussagen und Aussageformen

> Eine Aussage A ist ein sprachliches Gebilde, dem entweder der Wahrheitswert „wahr“, symbolisch W(A)=w, oder der Wahrheitswert „falsch“, symbolisch W(A)=f, zukommt.

Beispiel:

B1) Ein Wal ist ein Fisch W(B1)=f
B2) 2+4=6 W(B2)=w
B3) $\sqrt{5}$ ist eine rationale Zahl W(B3)=f
B4) x+3=8 Aussageform

> Eine Aussageform ist ein sprachliches Gebilde von der Form einer Aussage mit mindestens einer Leerstelle (Platzhalter; Objektvariable).

Beispiel:

xy>0

x ist eine Primzahl

Logische Verbindungen von Aussagen / Aussageformen

Beispiel:

B1) 5 + 3 = 8 und 1 + 2 = 3

B2) Wenn x eine gerade ganze Zahl ist und x > Z
dann ist x nicht Primzahl.

(Aussage-) logische Verknüpfungen (Junktoren)

Seien A, B Formeln (Aussagen / Aussageformen)

$\overline{A}$	:⇔	nicht A	(Negation)
$A \wedge B$	:⇔	A und B	(Disjunktion)
$A \vee B$	:⇔	A oder B	(Konjunktion)
$A \rightarrow B$	:⇔	wenn A, dann B	
$A \Rightarrow B$	:⇔	aus A folgt B („A impliziert B“)	(Implikation)
$A \leftrightarrow B$	:⇔	B genau dann, wenn A zweistellige Verknüpfung von Aussage(variablen) mit der Wahrheitstafel	(Bijunktion)
$A \Leftrightarrow B$	:⇔	aus A folgt B und umgekehrt o. A ist logisch äquivalent zu B Eine stets wahre Bijunktion heiß Äquivalenz	(Äquivalenz)

:⇔ ≙ „ist definitionsgemäß äquivalent zu“

Wahrheitstafel

Vorbelegungen A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w

Einige logische Sätze

Für zwei Aussagen A, B gilt:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B)$$

B:

A	B	A → B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee$ B	(A → B) ↔ ($\overline{A} \vee$ B)
w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w
f	w	w	w	w	w
f	f	w	w	w	w

Bem.: A ⇒ B ist immer wahr, wenn A falsch ist
Umkehrung von A ⇒ B ist nicht etwa B ⇒ A

Beispiel: $[x = \sqrt{2} \Rightarrow x > 0]$ ist für jedes reelle x eine wahre Aussage.
Aber $[x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}]$ falsch

Doppelte Verneinung und Sätze von de Morgan

Satz: Für je zwei Aussagen A, B gelten
a) $\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A$
b) $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$
c) $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

Beispiel:
$\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow \overline{\overline{A} \vee B} \Leftrightarrow \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$

Logische Distributivgesetze und logische Weiterschließen

Satz: Für Aussagen A, B, C gelten
1) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
2) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
3) $[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
Sprechweise: Wenn B aus A folgt und C aus B folgt, so folgt C aus A.

Beispiel:
„Es gibt Menschen, die berühmt sind."
„Jeder Mensch ist sterblich."

Definition: (Quantoren)
Für jedes x sei A(x) eine (zusammengesetzte) Aussageform.

1) Allquantor	$\forall x: A(x)$	:⇔	„Für jedes x ist A(x) wahr."
2) Existenzquantor	$\exists x: A(x)$	:⇔	„Es gibt mindestens ein x, so daß A(x) wahr ist."
3)	$\exists^1 x: A(x)$	:⇔	„Es gibt genau ein x, so daß A(x) wahr ist."

M(x) ≡	x ist Mensch	
Q(x) ≡	x ist berühmt	$\exists x: (M(x) \wedge Q(x))$
S(x) ≡	x ist sterblich	$\forall x: (M(x) \Rightarrow S(x))$

Satz:

a) $\overline{\forall\, x : A(x)} \Leftrightarrow \exists\, x : \overline{A(x)}$
b) $\overline{\exists\, x : A(x)} \Leftrightarrow \forall\, x : \overline{A(x)}$

Fasst man alle Objekte, für die eine Aussageform A(x) wahr ist, zusammen, so erhält man eine
Menge M
$M = \{x \mid A(x)\}$
$x \in M :\Leftrightarrow A(x)$
leere Menge $\emptyset = \{\,\}$

Relativierte Quantoren

Sei M eine Menge, B(x) eine Aussageform

a) $\forall\ x \in M: B(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x:(x \in M \Rightarrow B(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x:(A(x) \Rightarrow B(x))$

b) $\exists\ x \in M: B(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x: (x \in M \Rightarrow B(x))$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} : \overline{(n > n_0) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon)}$
$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0$

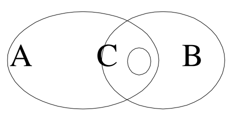
Def.:
a) zwei Mengen A, B heißen gleich (A = B), wenn gilt: $\forall$ x: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$
(Extensionalitätsaxiom)
b) $A \neq B :\Leftrightarrow \overline{A = B}$

Satz: Für beliebige Mengen A, B gilt:
$A = A$
$(A = B) \Leftrightarrow (B = A)$
$(A = B) \wedge (B = C) \Rightarrow (A = C)$

Definition:
a) Eine Menge A heißt Teilmenge einer Menge B, wenn gilt:
$\forall$ x; $x \in A \Rightarrow x \in B$
Notation: $A \subseteq B$
b) A heißt echte Teilmenge von B, wenn gilt:
$A \subseteq B \wedge \exists x: x \in B \wedge x \notin A$
Notation: $A \not\subseteq B$
c) $B \supseteq A :\Leftrightarrow A \subseteq B$
$B \not\supseteq A :\Leftrightarrow A \not\subseteq B$

Beispiel: $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, \ldots 100\} \not\subseteq \mathbb{N} \not\subseteq \mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{R}$

Veranschaulichung durch Venn-Diagramme

a)


b) $A = \{a, b, c, d, e\}$
$B = \{b, c\}$
$C = \{b\}$

Satz: (Ordnungseigenschaften von $\subseteq$)

Für beliebige Menge A, B, C gilt:

1) $\emptyset \subseteq A$ (wenn $A \neq \emptyset$, so gilt $\emptyset \not\subseteq$ P)
2) $A \subseteq A$
3) $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
4) $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Potenzmenge

Definition: Sei M eine Menge

$\wp(M) := 2^M := \{X \mid X \subseteq M\}$

heißt Potenzmenge von M.

Beispiel:

$E = \{a, b\}$ $\quad$ $D = \{a, b, c\}$

$\wp(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$ $\quad$ $\wp(D) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, D\}$

Bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente der endlichen Menge M, so ist $|\wp(M)| = 2^{|M|}$

Operationen mit Mengen

Def.: Seien A, B Mengen

Durchschnitt $\quad A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Vereinigung $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Differenz $\quad A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Komplement $\quad \complement A := \overline{A} := \{x \mid x \notin A\}$

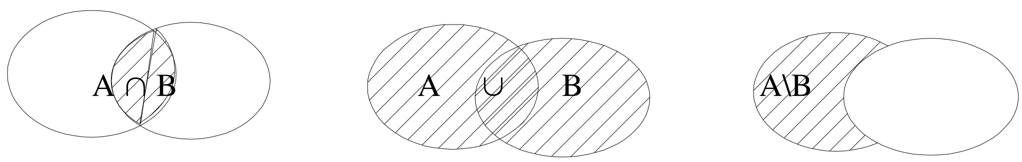
Beispiel:

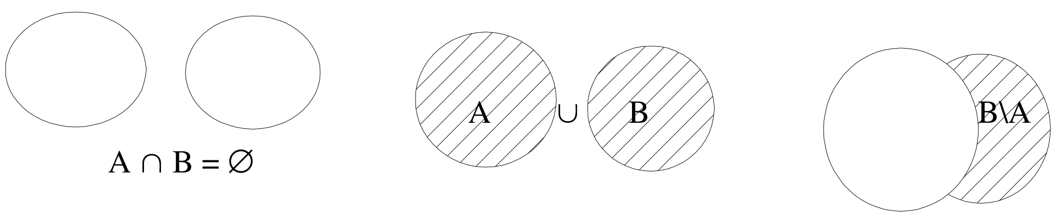
$A = \{a, b, c, d\}$

$B = \{c, d, e\}$

$A \cap B = \{c, d\}$ $\quad$ $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

$A \setminus B = \{a, b\}$ $\quad$ $B \setminus A = \{e\}$





$A \cap B = \emptyset$

Zwei Mengen A, B heißen disjunktiv, falls $A \cap B = \emptyset$

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Satz: (Gesetze der Mengenalgebra)

Für beliebige Mengen A, B, C gelten

1. $A \cap B = A$ $\quad A \cup B = A$ $\quad$ Idempotenzgesetze
2. $A \cap B = B \cap A$ $\quad A \cup B = B \cup A$ $\quad$ Kommunikativitätsgesetze
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\quad$ Assoziativgesetze
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\quad$ Distributivgesetze
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
6. $\overline{\overline{A}} = A$
7. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
8. $A \cap \emptyset = \emptyset$ $\quad A \cup \emptyset = A$ $\quad \emptyset$ neutrales Element bzgl. ' $\cup$ '
   $A \setminus \emptyset = A$

<u>Beweis zu 4.</u>

<u>Behauptung:</u>
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<u>Benütze</u>: $X = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$
d.h. zu zeigen sind: (a) $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$

zu (a) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$
$\Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$
$\Rightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$
$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(b) analog

<u>Satz:</u> Seien A, B Mengen, so gelten
1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

de Morgan'sche Gesetze

<u>Beweis von 3.</u>

$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$
$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Aussonderungsaxiomenschema

Ist G eine (Grund-) Menge und E(x) eine Eigenschaft / Aussageform, so existiert die Menge
$\{x \mid x \in G \wedge E(x)\} = \{ x \in G \mid E(x)\}$

<u>Beispiel:</u>
$G = \mathbb{N}$
E(x) = „x ist kleiner oder gleich 10“
$\mathbb{N}_{10} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\} = \{1, 2, ..., 9, 10\}$

Definition: Das Komplement einer Teilmenge A der Grundmenge G ist die Menge

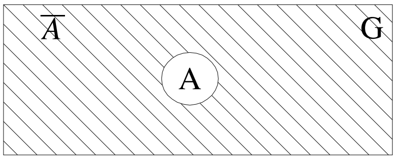
$\overline{A} := G \setminus A = x \in G \langle | \rangle x \notin A$

Beispiel:

G = {a, b, c, d, e}

A = {a, b}

$\overline{A} = \{c, d, e\}$



Satz: Seien G eine Grundmenge und A, B Teilmengen von G. Dann gelten:

$A \cap G = A$ $\qquad$ $A \cup G = G$

$A \cap G = A$ $\qquad$ $A \cup G = G$

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$A \cap \overline{A} = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup \overline{A} = G$

und die Morgan'schen Gesetze wie oben

Zusammenfassung der Gesetze

Involution	$\overline{\overline{x}} = x$
Kommutativität	$(x \wedge y) = (y \wedge x)$
	$(x \vee y) = (y \vee x)$
Assoziativität	$((x \vee y) \vee z) = (x \vee (y \vee z))$
	$((x \wedge y) \wedge z) = (x \wedge (y \wedge z))$
Distributivität	$(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
	$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$
Neutralität	$(x \vee 0) = x$
	$(x \wedge 1) = x$
De'Morgan	$\overline{(x \wedge y)} = \overline{x} \vee \overline{y}$
	$\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
Absorption	$(x \wedge (x \vee y)) = x$
	$(x \vee (x \wedge y)) = x$
Idempotenz $a \wedge a = a$	
	$a \vee a = a$

Beispiel: E = {a, b} $\qquad$ $\wp(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Operatortabelle für das Komplement bzgl. Grundmenge E

Sei $A \in \wp(E)$, (d.h. $A \subseteq E$)

$: \wp(E) \rightarrow \wp(E)$

$A \rightarrow \overline{A}$

$(A) = \overline{A}$

A	$\overline{A}$
$\emptyset$	{a, b}
{a}	{b}
{b}	{a}
{a, b}	$\emptyset$

Verknüpfungstafeln für $\cap$, $\cup$ Seien $A, B \in \wp(E)$

A B	$\emptyset$	{a}	{b}	{a, b}
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
{a}	$\emptyset$	{a}	$\emptyset$	{a}
{b}	$\emptyset$	$\emptyset$	{b}	{b}
{a, b}	$\emptyset$	{a}	{b}	{a, b}

$\emptyset \cap A = \emptyset$

$E \cap A = A$

A B	$\emptyset$	{a}	{b}	{a, b}
$\emptyset$	$\emptyset$	{a}	{b}	{a, b}
{a}	{a}	{a}	{a, b}	{a, b}
{b}	{b}	{a, b}	{b}	{a, b}
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}

$A \cup \emptyset = A$

$A \cup E = E$

$\cap: \wp(E) \times \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ zweistellige Verknüpfungen

$\cup: \wp(E) \times \wp(E) \rightarrow \wp(E)$ in $\wp(E)$

Beobachtung: $\wp(E)$ bildet zusammen mit $\cap$, $\cup$, $\overline{}$, $(\emptyset, E)$ eine sogenannte algebraische Struktur.

Definition: Eine algebraische Struktur ist ein (n+1)-Tupel $(V, \varphi_1, ..., \varphi_n)$, wobei V eine nichtleere Menge ist und $\varphi_1, ..., \varphi_n$ Verknüpfungen in V sind.

Obiges Beispiel:

$V \triangleq \wp(E)$, n = 3

$\varphi_1 \triangleq \cap$ $(\mathbb{N}, +)$

$\varphi_2 \triangleq \cup$ $(\mathbb{Z}, +, -)$

$\varphi_3 \triangleq \overline{}$ $(\mathbb{N}_0, \text{kgV}, \text{ggT})$

2. Boole'sche Algebra

Definition: (Boole'sche Algebra)

Eine algebraische Struktur (V, $\sqcap$ (et), $\sqcup$(vel), $\overline{\ }$, 0, 1 heißt Boole'sche Algebra, wenn gilt:

1. $\sqcap$, $\sqcup$ sind zweistellige Verknüpfungen in V ($\sqcap, \sqcup$: V x V → V
2. $\overline{\ }$ ist eine einstellige Verknüpfung in V ($\overline{\ }$: V → V)
3. $\forall$ x, y, z $\in$ V gelten die Axione:
   1. A_1: $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ Assoziativgesetze
A_2: $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$
   2. K_1: $x \sqcap y = y \sqcap x$ Kommunikativgesetze
K_2: $x \sqcup y = y \sqcup x$
   3. D_1: $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ Distributivgesetze
D_2: $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$
   4. V_1: $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ Verschmelzungsgesetze
V_2: $x \sqcup (x \sqcap y) = x$
   5. N_1: Es existiert für $\sqcap$ ein <u>neutrales</u> Element $1 \in V$ (1 heißt Einzelelement)
$x \sqcap 1 \sqcap x$
N_2: Es existiert für $\sqcup$ ein neutrales Element $0 \in V$ (0 heißt Nullelement)
$x \sqcup 0 = x = 0 \sqcup x$
   6. Zu jedem x $\in$ V existiert ein $\overline{x} \in V$
c_1:$x \sqcap x = 0$
c_2:$x \sqcup x = 1$

<u>Satz:</u> Jede Mengenalgebra ($\wp$(E), $\cap$, $\cup$, $\overline{\ }$, $\emptyset$, E) mit Trägermenge $\wp$(E) einer beliebigen Menge E ist eine Boole'sche Algebra

B: $V \mathrel{\hat{=}} \wp(E)$ $\quad 0 \mathrel{\hat{=}} \emptyset$ und der Beweis der Axiome der BA ist bereits erbracht

$\sqcap \mathrel{\hat{=}} \cap$ $\quad 1 \mathrel{\hat{=}} E$

$\sqcup \mathrel{\hat{=}} \cup$

$\overline{\ } \mathrel{\hat{=}} \overline{\ }$

Vergleich: BA mit einer Zahlenalgebra

	V, $\sqcap$, $\sqcup$, $\overline{\ }$, $\cup$, 1	($\mathbb{R}$, $\cdot$, +)
Grundmenge, El.	V, x, y, z	$\mathbb{R}$, x, y, z
Zweistellige Verknüpfungen	$x \sqcap y \in V$, $x \sqcup y \in V$	$x \cdot y \in \mathbb{R}$, $x + y \in \mathbb{R}$
Einstellige Verknüpfungen	$\overline{x} \in V$	$\lvert x\rvert \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\lvert x\rvert} \in \mathbb{R}$ $\sin(x) \in \mathbb{R}$
Kommunikativgesetze	K_1, K_2	$x \cdot y = y \cdot x$, $x + y = y + x$
Assoziativgesetze	A_1, A_2	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ $x + (y + z) = (x + y) + z$
Neutrale Elemente	$x \sqcap 1 = x$, $x \sqcup 0 = y$	$x \cdot 1 = x \quad x + 0 = x$
Inverse Elemente		$x \cdot x^{-1} = 1 \quad (x \neq 0)$ $x + (-x) = 0$
Komplemente	C_1, C_2	
Distributivgesetze	$x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$	$x \cdot (y + z) = xy + xz$
Verschmelzung	V_1, V_2	

(V, $\sqcap$, $\sqcup$) heißt

1. Verband, falls K_1, K_2, A_1, A_2, V_1, V_2 gelten
2. distributiver Verband, falls Verband und D_1, D_2 gelten

Beispiele für Boole'sche Algebren

$\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \cdot, +, \overline{}, 0, 1)$ mit

$\cdot$	0	1	+	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	0

ist eine BA

Beweis: Zu zeigen ist, daß für die Axiome einer BA gelte:

1. Axiome K_1, K_2 ergeben sich aus der Symmetrie der Verknüpfungstafeln.
2. Axiome D_1, D_2 in Wertetabelle
   zu D_1: 2.2.: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

x	y	z	y + z	$x \cdot (y + z)$	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$(x \cdot y) + (x \cdot z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

3. Neutrale Elemente
   $0 + 0 = 0$ d.h. $x + 0 = x$
   $1 + 0 = 1$
   $0 \odot \cdot 1 = 0$ d.h. $x \cdot 1 = x$
   $1 \cdot 1 = 1$
4. $1 \cdot \overline{1} = 1 \cdot 0 = 0$
   $0 \cdot \overline{0} = 0 \cdot 1 = 0$
   $1 + \overline{1} = 1 + 0 = 1$
   $0 + \overline{0} = 0 + 1 = 1$

Beispiele: Teilalgebra

Sei z eine gegebene natürliche Zahl

Betrachte $T_Z = \{x \in \mathbb{N} \text{ und } x \mid z\}$ = Menge aller natürlichzahligen Teiler von z.

Betrachte:

$x \sqcap y := ggT(x, y)$
$x \sqcup y := kgv(x, y)$
$\overline{x} := \frac{z}{x}$

Bem.: $x, y \in T_Z$
d.h. $x \mid z$ $y \mid z$
$ggT(x, y) \mid z$ $kgV(x, y) \mid z$
$\frac{z}{x} \mid z$

Satz: Die algebraische Struktur (T_Z, ggT, kgV, $\overline{}$ $(\frac{z}{\cdot})$, 1, Z) ist eine BA, wenn V_Z die Teilermenge einer natürlichen Zahl Z ist und Z keine mehrfachen Primfaktoren enthält.

Beispiel:

1. $Z \in$ (T_Z, ggT, kgV, *, 1, Z)

$T_Z = \{1, 2\}$

ggT	1	Z	kgv	1	Z	X	$\overline{x}$
1	1	1	1	1	Z	1	Z
Z	1	Z	Z	Z	Z	Z	1

(T_Z, ggT, kgV, *, 1, Z) ist bis auf Änderung der Beziehungen identisch zu B = ({0, 1}, ⊙, ⊕, ‾, 0, 1)

$\phi: T_Z \to \{0, 1\}$: $1 \to 0$, $Z \to 1$ | $\phi(1) = 0$, $\phi(Z) = 1$

$x, y \in T_Z$

$\phi(ggT(x, y)) = \phi(x) \odot \phi(y)$

$\phi(kgV(x, y)) = \phi(x) \oplus \phi(y)$

$\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$

$\phi(1^*) = \phi(Z) = 1$

$\overline{\phi(1)} = \overline{0} = 1$

Z = 6

$T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ $|T_6| = 4$

ggT	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	1
3	1	1	3
6	1	2	3

kgV	1	2	3	6
1	1	2	3	6
2	2	2	6	6
3	3	6	3	6
6	6	6	6	6

x	x*
1	6
2	3
3	2
6	1

(T_6, ggT, kgV, *, 1, 6) ist BA
strukturell identisch zu (℘({a, b}), ∩, ∪, ‾, Ø, {a, b}

$\phi: T_6 \to$ ℘({a, b})
1 → Ø
2 → {a}
3 → {b}
6 → {a, b}

1. 2 = 30
   $T_2 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ $|T_{30}| = 8 = 2^3$

Entsprechend den Axiomen einer BA gelten in (T_Z, ggT, kgV, *, 1, Z) folgende Beziehungen:

$x, y \in T_Z$:k_1: ggT(x, y) = ggT(y, x)
k_2: kgV(x, y) = kgV(y, x)
D_1: ggT(x, kgV(y, z)) = kgV(ggT(x, y), ggT(x, z))
D_2: kgV(x, ggT(y, z) = ggT(kgV(x, y), kgV(x, z))

Beispiel zu D_1:
ggT(1, kgV(2, 3)) = ggT(1, 6) = 1
kgV(ggT(1, 2), ggT(1, 3)) = kgV(1, 1)=1

<u>Einselement</u> ist Z, denn für $x \in T_Z$ gilt ggT(x, 1) = 1

Nullelement ist 1, denn für $x \in T_Z$ gilt kgV(x, 1) = x

Für die Abbildung , definiert durch $x^* = \frac{z}{x}$ gilt ebenfalls ggT(x, x*) = 1

kgV(x, x*) = Z

Gegenbeispiel:

$Z = 4 = 2^2$

$T_4 = \{1, 2, 4\}$

Behauptung: Zu Z gibt es kein 2*, für das C_1, C_2 gelten denn

$$ggT(Z, Z^*) = ggT(Z, \frac{4}{2}) = ggT(2, 2) = 2 \neq 1$$

2.1. Gesetze einer Boole'schen Algebra

Satz 1: (Dualitätsprinzip)

Jeder Satz, der aus den Axiomen einer BA ableitbar ist, bleibt gültig, wenn die Verknüpfungen $\sqcap$ und $\sqcup$ sowie die neutralen Elemente 0 und 1 überall gleichzeitig $\overline{x}$ untereinander vertauscht werden.

Beweis: folgt aus der Symmetrie der Axiome bezüglich Verknüpfungen bzw. neutralen Elementen.

Bsp: Idempotenzgesetz

Satz2: (Idempotenzgesetz)

Sei $(V, \sqcap, \sqcup, \overline{}, 0, 1)$ eine BA.

Für alle $x \in V$ gilt:

(I) $x \sqcap x = x$

(II) $x \sqcup x = x$

Beweis:

(I)		(II)	
$x = x \sqcap 1$	N1	$x = x \sqcup 0$	N2
$= x \sqcap (x \sqcup \overline{x})$	C1	$= x \sqcup (x \sqcap \overline{x})$	C1
$= (x \sqcap x) \sqcup (x \sqcap \overline{x})$	D1	$= (x \sqcup x) \sqcap (x \sqcup \overline{x})$	D2
$= (x \sqcap x) \sqcup 0$	C1	$= (x \sqcup x) \sqcap 1$	C2
$= x \sqcap x$	N2	$= x \sqcup x$	N1

Beispiel: Eindeutigkeit neutraler Elemente

Satz 3:

Sei $(V, \sqcap, \sqcup, \overline{}, 0, 1)$ eine BA.

Die neutralen Elemente bezüglich $\sqcap$, $\sqcup$ sind eindeutig bestimmt,

d.h. es gibt genau ein Element 1, so daß für alle $x \in V$ gilt: $x \sqcap 1 = x$

0 $\quad \sqcup\, 0$

Beweis: (indirekt)

Angenommen es existiert ein Element $\tilde{1} \in V$ mit $1 \neq \tilde{1}$

und für alle $x \in V$ gilt $x \sqcap \tilde{1} = x$

Dann gilt z.B. für $x = 1$ auch $1 \sqcap 1 = \tilde{1} = 1 \sqcap \tilde{1} = \tilde{1}$

Anwendung: Termumformung in der BA $(V, \sqcap, \sqcup, \overline{}, 0, 1)$

Übung: Weisen Sie nach, daß gilt:

(I) $(T_Z$, ggT, kgV, *, 1, Z)

ist für $z = p^3$, $p \in \wp$
keine BA
Idee: Zeige, daß ein Axiom der BA nicht gilt.
c_1: $x \sqcap \overline{x} = 0$ für jedes $x \in V$

$T_Z = \{1, p, p^2, p^3\}$
$|T_Z| = 4 = z^2$

Test also c_1 für $x = p$: $ggT(p, p^*) = ggT(p, \frac{p^3}{p}) = ggT(p, p^2) = p \neq 1$

d.h. c_1 gilt nicht

(II) $(((x \sqcap y) \sqcup z) \sqcap (\overline{x \sqcup z})) \sqcup (\overline{y} \sqcap (\overline{x \sqcap \overline{z}})) = \overline{y} \sqcap (\overline{x} \sqcup z)$
und interpretieren Sie diesen in (T_Z, ggT, kgV, *, 1, Z)
(III) $(x \sqcup (x \sqcap y)) \sqcap (x \sqcup (y \sqcap z)) = x$

Übung: (zum Thema Potenzmenge und Produktmenge

1. Für welche Mengen A, B gilt:
   (i) $\wp(A) = A$ $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$
   (ii) $|\wp(A)| = 10$
   (iii) $|A \times B| = 9$
   (iv) $|A^3| = 8$ $A^3 = \{(x, y, z) \mid x \in A \text{ und } y \in A \text{ und } z \in A\}$
   (v) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$

   zu (i):
   $A = \{a\}$ $A = \emptyset$
   $A^3 = \{(a, a, a)\}$ $A^3 = \emptyset$
   $A = \{a, b\}$
   $A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}$

   zu (ii):
   $2^n \neq 10$
   $\forall n \in \mathbb{N}$

   zu (iii):
   $\overline{|A \times B|} = |A| \cdot |B|$ $9 = 3 \cdot 3$
   $|A^3| = |A \times A \times A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^3$
   zu (iv):
   jedes A mit $|A| = 2$

2. Sei $|A| = 3$, $|B| = 2$
   (i) Wie groß ist $|A \times B|$?
   (ii) Wieviele Teilmengen hat A x B?
   (iii) Wieviele Abbildungen von A in B gibt es?
   (iv) Wieviele zweistellige Verknüpfungen in A gibt es? (d.h. Abbildungen $A \times A \rightarrow A$)

Relationen & Funktionen

Definition: Eine Relation zwischen A und B ist eine Teilmenge von A x B. Ist ϕ solch eine Relation, so bedeute $a \phi b$, so daß $(a, b) \in \phi$.

z.B. $A = B = \{1, 2, 3, 4\}$
ϕ 'kleiner'-Relation

$\phi \subseteq A \times A \quad \phi = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

Definiton: Eine Funktion /Abbildung von A nach B ist eine Relation mit der Eigenschaft $\forall a \in A\ \exists^1$ $b \in B$: $a\ \phi\ b$

Wir notieren dafür $b = f(a)$ und nennen
A Definitionsbereich von f und
B den Wertebereich.

3. Satz von Stone

3.1. Isomorphie-Begriff

$\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \cdot, +, -, 0, 1) \quad (\{\emptyset, E\}, \cap, \cup, \overline{\ }, \emptyset, E)$

definiere folgende Abbildung $\phi: \{0, 1\} \rightarrow \{\emptyset, E\}$

durch $\phi(0) \rightarrow \emptyset$

$\phi(1) \rightarrow E$

Bemerkung: ϕ ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

$\phi: V \rightarrow \tilde{V}$

heißt (i) injektiv, falls $\forall x_1, x_2 \in V$ gilt

s. Formelsammlung S. 89

$\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(ii) surjektiv, falls $\forall\ y \in \tilde{V}\ \exists\ x \in V: y = \phi(x)$

$$\forall\ x, y \in 0, 1:$$
$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cap \phi(y)$$
$$\phi(x + y) = \phi(x) \cup \phi(y)$$
$$\phi(\overline{x}) = \overline{\phi(x)} = E \setminus \phi(x)$$

Definition:

Zwei algebraische Strukturen (V, f_1, f_2, f_3), $(\tilde{V}, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ mit den zweistelligen Verknüpfungen f_1, f_2, $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ und einstelligen Verknüpfungen f_3, $\tilde{f}_3$ heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ von V auf $\tilde{V}$ gibt, so daß gilt:

$\phi(f_1(x, y)) = \tilde{f}_1(\phi(x), \phi(y))$,
$\phi(f_2(x, y)) = \tilde{f}_2(\phi(x), \phi(y))$,
$\phi(f_3(x)) = \tilde{f}_3(\phi(x)) \qquad \forall\ x, y \in V$

$$\begin{array}{ccccc}
\{0, 1\} & \times & \{0, 1\} & \xrightarrow{+} & \{0, 1\} \\
\phi\downarrow & & \phi\downarrow & \cap & \phi\downarrow \\
\{\emptyset, E\} & \times & \{\emptyset, E\} & \xrightarrow{\cup} & \{\emptyset, E\}
\end{array}$$

Satz von Stone (M. H. Stone, 1936)

Jede endliche B$\tilde{A}$ (V, $\sqcap$, $\sqcup$, $\overline{\ }$, 1, 0) ist isomorph zu einer (Potenz-)Mengenalgebra ($\wp(E)$, $\cap$, $\cup$, $\overline{\ }$, $\emptyset$, E) zu einer geeignet zu wählenden endlichen Menge E

Beweis: lassen wir aus

Folgerung: Ist (V, $\sqcap$, $\sqcup$, $\overline{\ }$, 1, 0) eine endliche BA, so gilt:
$\exists n \in \mathbb{N}: |V| = 2^n$

Beweis: Nach dem Satz von Stone gibt es eine Bijektion $\phi: V \to \wp(E)$

d.h. $|V| = |\wp(E)| = 2^{|E|}$ m.a.W. $N=|E|$

Algorithmus zur Bestimmung von E, ϕ:

gegeben: endliche BA $(V, \sqcap, \sqcup, \overline{}, 1, 0)$

```
✗ Setze A = { }
✗ Für jedes x ∈ V\{ 0 }
  {
   Setze V_x = { }
   Für jedes y ∈ V\{ 0 }
   {
   bestimme z = x ⊓ y
   wenn z == y, so setze V_x = V_x ∪ {y}
   }
   wenn |V_x| == 1, so setze A:=A ∪ {x}
  }
  setze φ( 0 ) = Ø, E = A
  Für jedes x ∈ V\{ 0 },
   setze φ(x) = V_x ∩ A
```

Ist $|V| = 2$, so setze $\phi(0) = \emptyset$

$\phi(1) = \{a\} = E$

sonst...

Beispiel:

$V = T_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

$x \sqcap y = ggT(x, y)$

$x \sqcup y = kgV(x, y)$

$\overline{x} = \frac{6}{x}$ $V\backslash\{0\} = \{2, 3, 6\}$

Aufgabe: Bestimme E, ϕ , so daß $\phi(T_6) = \wp(E)$ isomorph

x	y	ggT(x, y)	
2	2	2	
2	3	1	$V_2 = \{2\}$
2	6	2	
3	2	1	
3	3	3	$V_3 = \{3\}$
3	6	3	
6	2	2	
6	3	3	$V_6 = \{2, 3, 6\}$
6	6	6	

$A = \{2, 3\} = E$

$\phi(1) = \emptyset$, $\phi(2) = V_2 \cap A = \{2\}$, $\phi(3) = \{3\}$, $\phi(6) = \{2, 3\} = V_6 \cap A$

Übung: Bestimme nach obigem Algorithmus eine zur BA (T_{30}, ggT, kgV, *, 1, 30) isomorphe Potenzmengenalgebra ($\wp(E)$, $\cap$, $\cup$, $\overline{}$, Ø, E) durch Angabe von E und der Bijektion $\phi: T_{30} \rightarrow \wp(E)$

Aufgabe 1: Man interpretiere den folgenden booleschen Term

$(x_1 \sqcup x_2) \sqcap (\overline{x_1} \sqcup x_2) \sqcap (x_1 \sqcup \overline{x_2})$

aussagenlogisch und formuliere diesen umgangssprachlich mit:

x_1: Oma fährt Motorrad

x_2: Opa hütet die Hühner

Man setze hierzu durch Umformung (mit Hilfe der Gesetze der BA) eine möglichst einfache äquivalente umgangssprachliche Formulierung.

Lösung:

$= x_2 \sqcup (x_1 \sqcap \overline{x_1}) \sqcap (x_1 \sqcup \overline{x_2}) =$	Distributivität
$= x_2 \sqcap (x_1 \sqcup \overline{x_2}) =$	Neutralität
$= (x_2 \sqcap x_1) \sqcup (x_2 \sqcap \overline{x_2}) =$	Distributivität
$= x_1 \sqcap x_2$	Neutralität

Aufgabe 2: Man vereinfache folgende booleschen Terme und gebe jeweils den dualen Term an:

(i) $(x_1 \sqcup (\overline{x_2} \sqcap x_1)) \sqcap (x_1 \sqcup (x_2 \sqcap x_3))$

(ii) $(x_1 \sqcap x_2) \sqcup (x_1 \sqcap x_2 \sqcap x_3)$

(iii) $(x_1 \sqcup \overline{x_2}) \sqcap (\overline{x_1} \sqcup x_2) \sqcap (\overline{x_1} \sqcup \overline{x_2})$

(iv) $x_1 \sqcap x_2 \sqcap (\overline{x_3} \sqcup (x_1 \sqcap x_3))$

zu (i)

$x_1 \sqcup (\overline{x_2} \sqcap x_1 \sqcap x_2 \sqcap x_3) =$ Distributivität, Kommutativität, Assoziativität

$x_1 \sqcup (x_1 \sqcap x_3 \sqcap 0)$	Komplement
$x_1 \sqcup 0$	Dominanz
x_1	Neutralität

zu (ii)

$x_1 \sqcap x_2$	Verschmelzung

zu (iii)

4. Boolesche Funktionen

Sei (V, $\cdot$, +, $\overline{}$, 0, 1) eine BA.

Begriffe:

(1) Elemente der Trägermenge V heißen (Boolesche) Konstanten.

(2) Ein Zeichen, das mit genau einem (beliebigen) Element der Trägermenge belegt werden kann, heißt (Boolesche) Variable.

(3) Ist $X_n = \{x_1, ..., x_n\}$ eine Menge von Booleschen Variablen, so gelte:

(i) Jede Konstante $a \in V$ und jede Variable $x_i \in X_n$ ist ein Boolescher Term.

(ii) Sind A, B Boolesche Terme, so auch $\overline{A}, (A \cdot B), (A + B)$

(iii) Nur Zeichenfolgen, die sich mit (i) und (ii) in endlich vielen Schritten konstruieren lassen, sowie deren Abkürzungen gemäß den Vorrangregeln heißen Boolesche Terme

Beispiele:

0

$(x_1 + x_2) + (x_1\, x_3)$

(x_1) kein Boolescher Term, da Klammer um Einzelelement syntaktisch nicht gültig

Definition: Eine Abbildung $F: V^n \rightarrow V$ heißt (n-stellige) Boolesche Funktion. Ist dabei $V = \mathbb{B} = \{0, 1\}$, so heißt $F: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ auch (n-stellige) binäre Boolesche Funktion.

Beschreibungsformen:

i. Funktionsterme (Boolesche Terme)
ii. Pfeildiagramme
iii. Wertetabelle
iv. Karnaugh-Diagramm

zu (i): Funktionsterme

Ein Boolescher Term in n Variablen realisiert genau eine n-stellige Boolesche Funktion.

z.B. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \overline{x_2} + x_3$

Bemerkung 1: syntaktische Gleichheit

Zwei BT'e sind (syntaktisch) gleich, wenn sie zeichenweise übereinstimmen, ansonsten verschieden.

z.B. $(x_1 + x_2)$ ist syntaktisch verschieden zu $(x_2 + x_1)$

Bemerkung 2: semantische Gleichheit

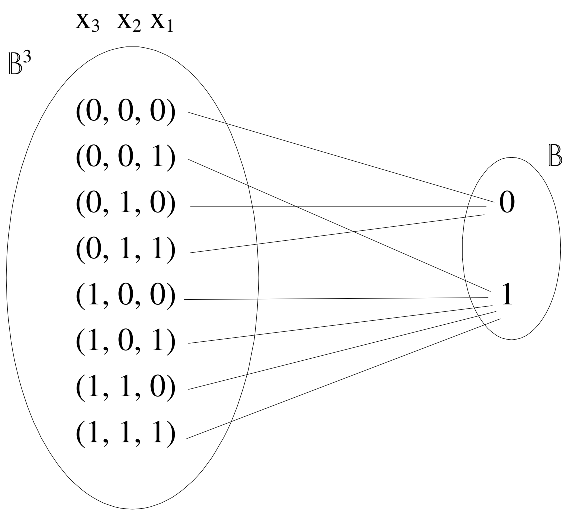
Zwei BT'e A, B heißen äquivalent (Notation A = B), wenn sie bei gleicher Belegung der gemeinsamen Variablen stets das gleiche Resultat liefern.

z.B. $\overline{(\overline{x_1} + \overline{x_2})} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} = \overline{(x_1 + x_2)} + (x_1 x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} + x_1 x_3$

⇒ Für eine Boolesche Funktion gibt es viele verschiedene äquivalente Boolesche Terme

ges.: Standard-Notation bzw. Normalformen für BT'e

zu (ii) Pfeildiagramm



zu (iii) Wertetabellen

$x_3\ x_2\ x_1$	$F(x_1, x_2, x_3)$

0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

Linke Seite: alle 2^n möglichen Belegungen der Variable (n = 3)
rechte Seite: für zugehörigen Funktionswerte

x_2x_1	$\overline{x_2}\,\overline{x_1}$	$\overline{x_2}\,x_1$	$x_2\,x_1$	$x_2\,\overline{x_1}$
x_3	00	01	11	10
$\overline{x_3}$	0	1	0	0
X_3	1	1	1	1

5. Normalformen Boolescher Funktionen

5.1. Disjunktive und konjunktive Normalform

Definition:

1. Seinen $x_1, ..., x_n$ paarweise verschiedene Boolesche Variablen und $z_i = x_i$ oder $z_i = \overline{x_i}$ für i = 1, ..., n, dann nennt man das Boolesche Produkt $z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n$ auch n-stelligen Konjunktionsterm und die Boolesche Summe $z_1 + z_2 + ... + z_n$ einen n-stelligen Disjunktionsterm
2. 1 ist 0-stelliger Konjunktionsterm
   0 ist 0-stelliger Disjunktionsterm
3. Seien $k_1, k_2, ..., k_m$ paarweise verschiedene Konjunktionsterme und $D_1, D_2, ... D_m$ paarweise verschiedene Disjunktionsterme
   Dann heißt der Boolesche Term

   $K_1 + K_2 + ... + K_m$ bzw. $\sum_{i=1}^{m} K_i$ disjunktive Normalform (DNF) (Disjunktion von Konjunktionstermen)

   $D_1 \cdot D_2 \cdot ... \cdot D_m$ bzw. $\pi_{i=1}^{m} D_i$ konjunktive Normalform (KNF) (Konjunktion von Disjunktivtermen

Beispiele: n = 3, x_1, x_2, x_3 Boolesche Variablen

(DNF): $x_1 x_2 \overline{x_3} + x_2 x_3 + x_1 x_3$

(KNF): $(x_1 + x_2 + \overline{x_3}) \cdot (x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_3)$

Satz: Zu jedem Booleschen Term A gibt es eine zu A äquivalente DNF (KNF).
Diese ist i.a. Nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel: $F{:}\mathbb{B}^4 \rightarrow B$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(\overline{x_3} + x_1 x_4) =$$
$$= x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_4 \qquad \text{(DNF)}$$
$$= x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3 x_4 \qquad \text{(DNF)}$$
$$= \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3 x_4 \qquad \text{(DNF)}$$

	$x_1 x_2$	$x_1 \overline{x_2}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$	$\overline{x_1} x_2$
$x_3 x_4$	1	0	0	0
$x_3 \overline{x_4}$	0	0	0	0
$\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	1	0	0	1
$\overline{x_3} x_4$	1	0	0	1

5.2. Kanonische disjunktive und kanonisch konjunktive Normalform

Definition: Seien $x_1, ..., x_n$ paarweise verschiedene Boolesche Variablen
Eine DNF $K_1 + K_2 + ... + K_m$
(KNF $D_1 \cdot D_2 \cdot ... \cdot D_m$)
heißt kanonisch (kDNF (kKNF))
genau dann, wenn jeder Konjunktionsterm (Disjunktionsterm) alle Variablen enthält.
Die K_i heißen dann Minterme, Vollkonjunktionen,
die D_i heißen dann Maxterme, Volldisjunktionen.

Satz: (Normalformtheorem)

Seien $x_1, ..., x_n$ paarweise verschiedene Boolesche Variablen und $\underbrace{\vec{\alpha}}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathbb{B}^n$ bezeichnen eine beliebige Belegung der Variablen. Dann gibt es zu jedem Term $A(x_1, ..., x_n)$ eine äquivalente kDNF (kKNF) und diese ist eindeutig bestimmt durch:

kDNF: $$\sum_{\substack{\vec{\alpha} \in B^n \\ A(\vec{\alpha}) = 1}} Z_1(\alpha_1) \cdot Z_2(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot Z_n(\alpha_n)$$

kKNF: $$\prod_{\substack{\vec{\alpha} \in B^n \\ A(\vec{\alpha}) = 0}} (Z_1(1-\alpha_1) + \ldots + Z_n(1-\alpha_n))$$

Beispiel:

x_1 x_2	$f(x_1, x_2)$
0 0	0
0 1	1
1 0	0
1 1	1

KDNF: $$f(x_1, x_2) = \sum_{\substack{(0,1) \\ (1,1) \\ \alpha_1\ \alpha_2}} Z_1(\alpha_1) Z_2(\alpha_2) = Z_1(0) Z_2(1) + Z_1(1) Z_2(1) = \overline{x_1} x_2 + x_1 x_2$$

kKNF:

$$f(x_1, x_2) = \prod_{\substack{(0,0)\\(1,0)\\ \uparrow\ \uparrow\\ \alpha_1\ \alpha_2}} (Z_1(1-\alpha_1) + Z_2(1-\alpha_2)) =$$

$$= (Z_1(1-0) + (Z_2(1-0)))(Z_1(1-1) + Z_2(1-0)) =$$

$$= (Z_1(1) + Z_2(1))(Z_1(0) + Z_2(1)) = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + x_2)$$

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

KDNF: $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 + \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3} + x_1\,\overline{x_2}\,x_3$

kKNF:

$$f(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$

<u>Algorithmus 1:</u> Bestimmung der DNF/KNF für einen gegebenen Booleschen Term

① Anwendung der de Morganschen Regeln bis Komplemente nur bei Variablen

$\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$

$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

② Anwendung des Distributivgesetzes

$x(y + z) = xy + xz$

$x + yz = (x + y)(x + z)$

Anwendung des Komplementgesetzes

$x \cdot \overline{x} = 0$

$x + \overline{x} = 1$

Anwendung des Gesetzes vom neutralen Element

$x \cdot 1 = x$

$x + 0 = x$

Anwendung des Idempotenzgesetzes

$x \cdot x = x$

$x + x = x$

Anwendung des Dominanzgesetzes

$x \cdot 0 = 0$

$x + 1 = 1$

③ Zusammenfassung mehrfacher Konjunktions-/Disjunktionsterme sowie Streichen von 0 bzw. 1

Beispiel:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 + x_2 x_3} = \overline{x_1}(\overline{x_2 x_3}) = \overline{x_1}(\overline{x_2} + \overline{x_3}) \quad \text{KNF}$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} \quad \text{DNF}$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 \overline{x_2} + x_1 x_3} + \overline{x_1} = \overline{x_1 \overline{\overline{x_2}}} \cdot \overline{x_1 x_3} + \overline{x_1} = (\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_3}) + \overline{x_1} =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_1})(\overline{x_1} + \overline{x_3} + \overline{x_1}) =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_3}) \quad \text{KNF}$$
$$= \overline{x_1}(\overline{x_1} + \overline{x_3}) + x_2(\overline{x_1} + \overline{x_3}) =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_1} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + x_2 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_3} =$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 + x_2 \overline{x_3} \quad \text{DNF}$$
$$= \overline{x_1} + \overline{x_1} x_2 + x_2 \overline{x_3} = \overline{x_1} + x_2 \overline{x_3} \quad \text{DNF}$$

<u>Algorithmus 2:</u> Bestimmung der kDNF/kKNF aus einer gegebenen DNF/KNF

Solange der Term noch nicht in kDNF/kKNF ist
① Wähle Konjunktios-/Disjunktionsterm K/D und eine Variable x_ν, die in K/D vorkommt
② Ersetze K durch $K(x\ \text{nuy} + \overline{x_\nu})$ bzw. D durch $D + x_\nu \overline{x_\nu}$
③ Wende Distributivgesetze an und ersetze $K(x_\nu + \overline{x_\nu})$ durch $Kx_\nu + K\overline{x_\nu}$ bzw. $D + x_\nu \overline{x_\nu}$ durch $(D + x_\nu)(D + \overline{x_\nu})$
④ Fasse gleiche Konjunktions-/Disjunktionsterme nach dem Idempotenzgesetz zusammen.

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 + x_2 x_3} = \overline{x_1}\,\overline{(x_2 x_3)} = \text{ ignl } = \overline{x_1}(\overline{x_2} + \overline{x_3}) \quad \text{KNF}$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} \quad \text{DNF}$$

<u>Beispiel:</u> $= \overline{x_1}\,\overline{x_2}(x_3 + \overline{x_3}) + \overline{x_1}\,\overline{x_3} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_3} =$

$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_3}(x_2 + \overline{x_2}) =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \cancel{\overline{x_1}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}} = \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \quad \text{kDNF}$$

d.h. $f_1(x_1, x_2, x_3)$ nimmt genau für die Belegungen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \{(0, 0, 1), (0, 0, 0), (0,1, 0)\}$

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1})(\overline{x_2} + \overline{x_3}) = (\overline{x_1} + x_2 \overline{x_2})(\overline{x_2} + \overline{x_3}) = (\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2})(\overline{x_2} + \overline{x_3}) =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3 \overline{x_3})(\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_1 \overline{x_1}) =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_2} + \overline{x_3} + x_1)(\cancel{\overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_1}}) =$$
$$= (\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}) \quad \text{kKNF}$$

$f_1(x_1, x_2, x_3)$ nimmt genau für die Belegungen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0),$
$1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$

<u>6. Minimierung Boolescher Funktionen nach Quime-McCluskey</u>

<u>Ausgangspunkt:</u> Funktionsterm in kDNF

1. <u>Stufe:</u> Bestimmung der „Primimplikanten“
   ① Notiere in einer Tabelle alle Binäräquivalente und Dezimalwerte der Konjunktionsterme
   ② Sortiere Zeilen aufsteigend in Gruppen mit gleicher Anzahl von Einsen
   ③ Bilde neue Tabelle, indem jeweils zwei Konjunktionsterme/Binäre Äquivalente benachbarter Gruppen zusammengefaßt werden, wen sie sich in genau einer Position unterscheiden.
   Kennzeichne diese Stelle durch '-' (statt 0, 1).
   Markiere in der Ausgangstabelle die zusammengefaßten Zeilen durch '✓'.
   Notiere die Kombinationen der Dezimalwerte.

Gruppiere die Tabelle nach der Anzahl der Einsen.

④ Wiederhole Schritt ③, bis keine weitere Vereinfachung möglich ist.

Streiche mehrfache Terme/Binäräquivalente einer Gruppe.

⇒ Terme aller Tabellen, die nicht mit '✓' gekennzeichnet sind, heißen Primimplikanten

x_4 x_3 x_2 x_1

1 - - 0 $x_4 \overline{x_1}$

Indextabelle		$\boldsymbol{x_1}$ $\boldsymbol{x_2}$ $\boldsymbol{x_3}$ $\boldsymbol{x_4}$	
Indexgruppe	Dezimalwert	Binäräquivalent	
0	0	0 0 0 0	✓
1	2	0 0 1 0	✓
	4	0 1 0 0	✓
	8	1 0 0 0	✓
2	5	0 1 0 1	✓
	9	1 0 0 1	✓
	10	1 0 1 0	✓
	12	1 1 0 0	✓
3	7	0 1 1 1	✓
	11	1 0 1 1	✓
	13	1 1 0 1	✓

Indexgruppe	Dezimalwerte	Binäräquivalente	
		x_4 x_3 x_2 x_1	
0 - 1	0,2	0 0 - 0	✓
	0,4	0 - 0 0	✓
	0,8	- 0 0 0	✓
1 - 2	2,10	- 0 1 0	✓
	4,5	0 1 0 -	✓
	4,12	- 1 0 0	✓
	8,9	1 0 0 -	✓
	8,10	1 0 - 0	✓
	8,12	1 - 0 0	✓
2 - 3	5,7	0 1 - 1	P_1
	5,13	- 1 0 1	✓
	9,11	1 0 - 1	✓
	9,13	1 - 0 1	✓
	10,11	1 0 1 -	✓
	12,13	1 1 0 -	✓

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) =$

$\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$+ \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_2\,\overline{x_1}$

$+ \overline{x_4}\,x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$+ x_4\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$+ \overline{x_4}\,x_3\,\overline{x_2}\,x_1$

$+ x_4\,\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,x_1$

$+ x_4\,\overline{x_3}\,x_2\,\overline{x_1}$

$+ x_4\,x_3\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$

$+ \overline{x_4}\,x_3\,x_2\,x_1$

$+ x_4\,\overline{x_3}\,x_2\,x_1$

$+ x_4\,x_3\,\overline{x_2}\,x_1$

Indexgruppe	Dezimalwert	Binäräquivalent			
		x_4	x_3	x_2	x_1
0 – 1 / 1 – 2	0, 2, 8, 10	-	0	-	0 P_2
	0, 8, 2, 10	-	0	-	0
	0, 4, 8, 12	-	-	0	0 P_3
	0, 8, 4, 12	-	-	0	0
1 – 2 / 2 – 3	4, 5, 12, 13	-	1	0	- P_4
	8, 9, 10, 11	1	0	-	- P_5
	8, 9, 12, 13	1	-	0	- P_6

$P_1 = \overline{x_4}\, x_3\, x_1$

$P_2 = \overline{x_3}\, \overline{x_1}$

$P_3 = \overline{x_3}\, \overline{x_1}$

$P_4 = x_3\, \overline{x_2}$

$P_5 = x_4\, \overline{x_3}$

$P_2 = x_4\, \overline{x_2}$

<u>2. Stufe:</u> Primimplikantentafel

zur Reduktion auf die wesentlichen Primimplikanten

① Bilde Tabelle:

② Markiere in jeder Zeile die Konjunktionsterme des Primimplikanten mit '*'

③ Kennzeichne in den Spalten mit nur einer Markierung diese mit 'O' und markiere den zugehörigen Primimplikanten ebenfalls als wesentlichen Primimplikanten bzw als <u>Kernimplikanten</u>.

④ Von den restlichen Primimplikanten bestimme eine minimale Anzahl, die die restlichen Konjunktionsterme überdeckt; diese heißen <u>Restüberdeckung</u>.

⇒ Disjunktion der Kernimplikanten und der Restüberdeckung liefert eine Minimalform der DNF

		Dezimalwerte der Konjunktionsterme										
		~~0~~	~~2~~	4	~~8~~	~~5~~	~~9~~	~~10~~	12	~~7~~	~~11~~	13
5, 7	P_1					*				*		
0, 2, 8, 10	P_2	*	*		*			*				
0, 4, 8, 12	P_3	*		*	*				*			
4, 5, 12, 13	P_4			*		*			*			*
8, 9, 10, 11	P_5				*		*	*			*	
8, 9, 12, 13	P_6				*		*		*			*

$$f(x_{4,}\, x_{3,}\, x_{2,}\, x_1) = \overline{x_4}\, x_3\, x_1 + \overline{x_3}\, \overline{x_1} + x_4\, \overline{x_3} + x_3\, \overline{x_2}$$

<u>Beispiel:</u>

<u>geg.:</u> $\overline{x_1 \overline{x_4}} \cdot x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1 \overline{x_3} + x_4}$

<u>ges.:</u> kDNF und Minimalform nach Quime-McCluskey

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = (\overline{x_1} + x_4)\, x_2 \overline{x_3} + \overline{x_1 \overline{x_3}} \cdot \overline{x_4}$$
$$= \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} x_4 + (\overline{x_1} + x_3)\overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} + x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + x_3 \overline{x_4} \quad \text{DNF}$$
$$= \overline{x_1} x_2 x_3 (x_4 + \overline{x_4}) + x_2 \overline{x_3} x_4 (x_1 + \overline{x_1}) + \overline{x_1}\,\overline{x_4}(x_2 + \overline{x_2})(x_3 + \overline{x_3}) + x_3 \overline{x_4}(x_1 + \overline{x_2})(x_2 + \overline{x_2}) =$$
$$= \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} +$$
$$+ \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 +$$
$$+ x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \quad \text{kDNF}$$

Gruppe	Dezimalwert	Binäräquivalent $x_1 x_2 x_3$	x_4	
0	0	0 0 0	0	✓
1	4	0 1 0	0	✓
	2	0 0 1	0	✓
2	10	1 0 1	0	✓
	6	0 0 1	1	✓
	5	0 1 0	1	✓
3	14	1 1 1	0	✓
	13	1 1 0	1	✓

Gruppe	Dezimalwert	Binäräquivalent $x_1 x_2 x_3$	x_4	
0 – 1	0, 4	0 - 0	0	✓
	0, 2	0 0 -	0	✓
1 – 2	4, 6	0 1 -	0	✓
	4, 5	0 1 0	-	P_1
	2, 10	- 0 1	0	✓
	2, 6	0 - 1	0	✓
2 – 3	10, 14	1 - 1	0	✓
	6, 14	- 1 1	0	✓
	5, 13	- 1 0	1	P_2

Gruppe	Dezimalwerte	Binäräquivalent $x_1 x_2 x_3$	x_4	
0 – 1 / 1 – 2	0, 4, 2, 6	0 - -	0	P_3
	~~0, 2, 4, 6~~	~~0 - -~~	~~0~~	
1 – 2 / 2 – 3	2, 10, 6, 14	- - 1	0	P_4
	~~2, 6, 10, 14~~	~~- - 1~~	~~0~~	

	0	4	2	10	6	5	14	13
P_1		*				*		
P_2						*		*
P_3	*	*	*		*			
P_4			*	*	*		*	

Disjunktion von P_2, P_3, P_4 liefert Minimalform:

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = x_2 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_4} + x_3 \overline{x_4}$$

7. „Finanzmathematik“ (d.h. Zins- und Zinseszinsrechnung)

„Zinsen sind der Preis, den ein Schuldner für eine befristete Überlassung von Kaptital bezahlen muß.“ (Locarek)

Betrag der Zinsen errechnet sich aus der Höhe des Kapitals, dem Zinssatz und der Anzahl der Dauer der Überlassung (Anzahl und Länge der Zinsperiode)

Definition:	Beispiel:
$K_0 \triangleq$ Anfangskapital, Anfangswert des Kapitals, Barwert	100 €
$K_n \triangleq$ Endkapital, Endwert des Kapitals	105€
$n \triangleq$ Anzahl der Zinsperioden	1
$i \triangleq$ Zinssatz (gibt an, wieviel Zinsen im Anfangskapital von 1 Geldeinheit nach einer Zinsperiode ergibt)	0,05
$p = i \cdot 100 \triangleq$ Zinsfluß, Prozentzinssatz	5 %
$q = 1 + i \triangleq$ Aufzinsfaktor	1.05
$\frac{1}{q} \triangleq$ Abzinsfaktor	

typische Zinsperioden: 1 Jahr, ¼ Jahr, 1 Monat, 1 Tag

7.1. Einfache Zinsen

– werden immer vom Anfangskapital berechnet
  d.h. Zinsen voriger Zinsperioden werden nicht mitverzinst

Anzahl der Zinsperioden n	Endwert des Kapitals K_n
0	K_0
1	$K_0 + i \cdot K_0 = K_0(1 + i)$
2	$K_0 + i\,K_0 + i\,K_0 = K_0 + 2 \cdot i \cdot K_0 = K_0(1 + i \cdot 2)$
3	$K_0 + i\,K_0 + i\,K_0 + i\,K_0 = K_0 + 3\,i\,K_0 = K_0(1 + i \cdot 3)$
$\vdots$	$\vdots$
N	$\boxed{K_n = K_0(1 + i \cdot n)}$

Natürliche Zahlen & vollständige Induktion

Peano-Axiome

P_1: $\mathbb{1}$ ist eine natürliche Zahl

P_2: Jede natürliche Zahl hat eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als Nachfolger

P_3: $\mathbb{1}$ ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl

P_4: Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger

P_5: (Axiom der vollständigen Induktion)
Ist eine Aussage, die eine natürliche Zahl als Parameter enthält, wahr für $\mathbb{1}$ und für den Nachfolger jeder natürlichen Zahl, für die sie wahr ist, so ist sie wahr für jede natürliche Zahl.

Beispiel:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis: Induktionsanfang: (n = 1)

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Induktionsschritt: (n → n + 1)

Induktionsannahme: $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Zu zeigen: $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{= \frac{n(n+1)}{2} \text{ nach Ind.Ann.}} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)\frac{2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$k_1 = k_0 + ik_0$ Rekursions-

$k_{n+1} = k_n + ik_0$ gleichungen

Behauptung: $k_n = k_0 (1 + in)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang: (n = 1)

$k_1 = k_0 + ik_0 = k_0 (1 + i1)$

Induktionsschritt: (n → n + 1)

Induktionsannahme: $k_n = k_0 (1 + in)$

zu zeigen: $k_{n+1} = k_0 (1 + i (n + 1))$

$k_{n+1} = k_n + ik_0 = k_0 (1 + in) + ik_0 = k_0 + k_0in + ik_0 = k_0 + i (n + 1) k_0$

Bemerkung: Bei einfacher Verzinsung ist die Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{R}}$ eine arithmetische Folge, denn

$$k_{n+1} - k_n = \underbrace{ik_o}_{\text{Konstante}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

4 Typen von Aufgaben:

I. gegeben: K_0, i, n gesucht: K_n

II. geg: K_n, i, n ges: K_0 $K_0 = \frac{K_n}{1 + i\,n}$

III. geg: Kn, Ko, i ges: n $n = \frac{\frac{k_n}{k_o} - 1}{i}$

IV. geg: Kn, Ko, n geg: i $i = \frac{\frac{k_n}{k_0} - 1}{n}$

7.2. Zinseszins

Rekursionsgleichungen:
$$\boxed{\begin{array}{c} k_1 = k_0 + i\,k_0 \\ k_{n+1} = k_n + i\,k_n, \text{ für } n \in \mathbb{N} \end{array}}$$

Abgelaufene Perioden n	Endwert K_n
0	K_0
1	$K_1 = k_0 + i\,k_0 = k_0\,(1 + i)$
2	$K_2 = k_1 + i\,k_1 = k_1\,(1 + i) = k_0\,(1 + i)(1 + i) = k_0\,(1 + i)^2$
3	$K_3 = k_2 + i\,k_2 = k_2\,(1 + i) = k_0\,(1 + i)^2(1 + i) = k_0\,(1 + i)^3$

<u>Behauptung:</u> <u>Zinseszinsformel:</u> $\boxed{k_n = k_0\,(1+i)^n}$

<u>Beweis:</u> vollständige Induktion

<u>Induktionsanfang:</u> $(n = 1)$

$k_1 = k_0 + i\,k_0 = k_0\,(1 + i)^1$

<u>Induktionsschritt:</u> $(n \rightarrow n + 1)$

zu zeigen: $k_{n+1} = k_0\,(1 + i)^{n+1}$

$k_{n+1} = k_n\,(1 + i) = k_0\,(1 + i)^n(1 + i) = k_0\,(1 + i)^{n-1}$

Zinseszinsformel:

$$k_n = k_0\,(1+i)^n \qquad\qquad k_n = k_0\,(1+i)^n$$

$$\frac{k_n}{k_0} = (1+i)^n \qquad\qquad \frac{k_n}{k_0} = (1+i)^n$$

$$\sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} = 1+i \qquad\qquad \log\frac{k_n}{k_0} = n\log(1+i)$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} - 1 \qquad\qquad n = \frac{\log\frac{k_n}{k_0}}{\log(1+i)}$$

$$\log a^b = b\log a$$

7.3. wechselnde Zinssätze

K_0 $\quad K_1 = K_0(1+i_1)$ $\quad K_2 = K_0(1+i_1)^2$

0 1 2 n

$$k_{n_1+n_2} = k_0\,(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}$$

$$k_n = k_0\,(1+i)^n = k_0\,(1+i)^n\cdot(1+i)^n\cdot\ldots\cdot(1+i)^n$$

Welcher konstante Zinssatz i liefert über n Perioden den gleichen Endwert?

$$\frac{k_n}{k_0} = k_0\,(1+i)^n = k_0\,(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}} - 1}$$

<u>Bemerkung:</u> Wenn in der Periode j die Verzinsung mit Zinssatz j_i erfolgt, für j = 1 ... n, so gilt: $k_n = k_0\,(1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_n)$, dann ist der äquivalente Aufzinsfaktor einer Verzinsung mit konstantem Zinssatz I über n Perioden das geometrische Mittel der einzelnen Aufzinsfaktoren.

7.4. Geometrische Verzinsung

K_0 $\quad k_0(1+it_1)$ $\quad k_0(1+it_1)(1+i)$ $\quad k_0(1+it_1)(1+i)^n$ $\quad k_0(1+it_1)(1+i)^N(1+it_2)$

$$\underbrace{0\ \ t_1}_{t_1}\ \underbrace{k_0(1+it_1)(1+i)^2}_{\text{N Zinsperioden mit Zinssatz i}}\ \underbrace{n}_{t_2}$$

$t_1, t_2 \in [0, 1]$ Bruchteile einer Zinsperiode

Zugehörige Zinsformel: $k_n = k_0(1+i\,t_1)(1+i)^N(1+i\,t_2)$

<u>Beispiel:</u>

Annahme: Jeder Monat hat 30 Tage
Jedes Jahr hat 360 Tage

Aufgabe: Auf welchen Betrag wächst eine Geldanlage von 2000 € an bei einem Jahreszins von 8% vom 10.5.2002 bis zum 15.3.2010?

Lösung: $t_1 = \frac{230}{360}$, denn vom 10.5.2002 bis zum 31.12.2002 sollen es 230 Tage sein.

$N = 7$

$t_2 = \frac{75}{360}$, denn es sind 75 Tage vom 1.1.2010 bis 15.3.2010

$$k_n = 2000\left(1+0{,}08\frac{230}{360}\right)(1+0{,}08)^7\left(1+0{,}08\frac{75}{360}\right) = 3662{,}89$$

7.5. Unterjährliche Verzinsung

Betrachte Zeitraum von 1 Jahr.

Nomineller Jahreszinssatz sei i

relativer (unterjährlicher) Zinssatz: $i_{rel} = \frac{i}{m}$, wenn m die Anzahl der Jahresabschnitte ist, an deren Ende jeweils eine Zinsgutschrift erfolgt.

$$\overbrace{\underbrace{0 \qquad \frac{1}{m}}_{1_{rel} = \frac{1}{m}} \qquad \frac{3}{m} \quad \frac{m-1}{m} \quad 1 = \frac{m}{m}}^{i}$$

Bei einer Laufzeit von l Jahresabschnitten erhalten wir als

<u>Zinsformel bei unterjährlicher Verzinsung:</u>

$k_{\frac{1}{m}} = k_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^1$
i ≙ nomineller Jahreszinssatz
m ≙ Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

<u>Spezialfall:</u>

$$1 = m \cdot n : K_{\frac{m\cdot n}{m}} = k_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}$$

<u>Beispiel:</u> nomineller Zinsfluß sei 12 %, d.h. i = 0,12
K_0 sei 1000 €
Wie hoch ist das Endkapital nach 1 Jahr?
1) bei jährlicher Verzinsung: $k_1 = k_0(1+i) = 1000(1+0{,}12) = 1120$

2) bei halbjährlicher Verzinsung: $k_{\frac{2}{2}} = k_0 (1 + \frac{i}{2})^2 = 1000 (1 + \frac{0{,}12}{2})^2 = 1123{,}20$

3) bei vierteljährlicher Verzinsung: $k_{\frac{4}{4}} = k_0 (1 + \frac{i}{4})^4 = 1000 (1 + \frac{0{,}12}{4})^4 = 1125{,}51$

4) bei monatlicher Verzinsung: $k_{\frac{12}{12}} = k_0 (1 + \frac{i}{12})^{12} = 1000 (1 + \frac{0{,}12}{12})^{12} = 1126{,}82$

5) bei täglicher Verzinsung: $k_{\frac{360}{360}} = k_0 (1 + \frac{i}{360})^{360} = 1127{,}47$

$$\lim_{m \to \infty} k_{\frac{m \cdot n}{m}} = \lim_{m \to \infty} k_0 (1 + \frac{i}{m})^{m \cdot n} =$$

$$= k_0 \lim_{m \to \infty} ((1 + \frac{i}{m})^m)^n$$

$$= k_0 (\underbrace{\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{i}{m})^m}_{e^i})^n$$

Formel für stetige Verzinsung: $K_n = K_0 e^{i n}$

Beispiel: $k_1 = 1000 \cdot e^{0{,}12} = 1127{,}50$

i_{eff} effektiver Jahreszinssatz

$$K_1 = K_0 (1 + i_{rel})^n = K_0 (1 + i_{eff})$$

$$i_{iff} = (1 + i_{rel})^m - 1 =$$

$$= (1 + \frac{i}{m})^m - 1$$

Beispiel: Kapital wird mit nominellem Jahreszinssatz von 8% angelegt.
Zinsen werden nach jedem Vierteljahr gutgeschrieben.
Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

$$i_{eff} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1 = (1 + \frac{0{,}08}{4})^4 - 1 \approx 0{,}0824 > i$$

Bemerkung: Bernoulli-Ungleichung

$(1 + x)^n > 1 + nx$ für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1, x > 0$

liefert:

$$i_{eff} - (1 + \frac{i}{m})^m \cdot 1 > (1 + m \cdot \frac{i}{m}) - 1 = i$$

d.h. $i_{eff} > 1$

Beweis der Bernoulli-Ungleichung:

1. Variante: mit BinomischemLehrsatz $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\text{für } (1+x)^n = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} x^k =$$
$$= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n =$$
$$= 1 + nx + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n}_{>0}$$
$$> 1 + nx$$

<u>2. Variante:</u> mit vollständiger Induktion

<u>JA:</u> $(n = 2) \quad (1+x)^2 = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0} > 1 + 2x$

<u>JS:</u>

$$(n \to n+1)$$
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$
$$> (1+x)(1+nx) = 1 + x + \underbrace{nx^2}_{>0} + nx$$
$$> 1 + x + nx = 1 + (n+1)x$$

Konformer unterjährlicher Zinssatz

$$k_1 = k_0(1+i) = k_0(1+i_{konf})^m$$

$$\boxed{i_{konf} = \sqrt[m]{1+i} - 1}$$

Bernoulli-Ungleichung liefert:

$$1 + i = 1 + m\frac{i}{m} < (1 + \frac{i}{m})^m$$
$$\sqrt[m]{1+i} < 1 + \frac{i}{m}$$
$$i_{konf} < \frac{i}{m} = i_{rel}$$

<u>Beispiel:</u> Der nominelle Jahreszins ist 8% $\quad K_0 = 10000$

10000€ werden 1 Jahr verzinst $\quad i = 0{,}08$

Zinsgutschrift erfolgt vierteljährlich $\quad m = 4$

(a) unterjährlicher relativer Zinssatz

$$i_{rel} = \frac{i}{m} = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$$

(b) effektiver Jahreszinssatz

$$i_{eff} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1 = (1 + \frac{0{,}08}{4})^4 - 1 \approx 0{,}0824$$

(c) konformer vierteljährlicher Zinssatz

$$i_{konf} = \sqrt[m]{1+i} - 1 = \sqrt[4]{1+0{,}08} - 1 \approx 0{,}0194$$

Wie hoch ist das Kapital nach einem Jahr bei

(d) vierteljährlicher Verzinsung mit i_{rel}

$$K_1 = K_0(1+i_{rel})^m = 10000(1+0{,}02)^4 = 10824{,}32$$

(e) vierteljährliche Verzinsung mit dem konformen vierteljährlichen Zinssatz i_{konf}

$$K_1 = K_0(1+i_{konf})^m \approx 10000(1+0{,}0194)^4 = 10800$$

7.6. Rentenrechnung

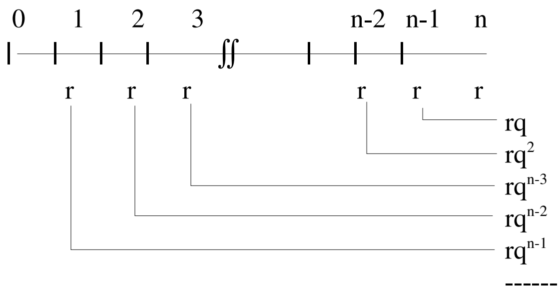
Renten sind in gleichen Zeitabständen wiederkehrende Zahlungen (vorschüssig oder nachschüssig)

Notation:

$r \mathrel{\widehat{=}}$ konstanter Zahlungsbetrag pro Zeitabschnitt

$q = 1 + i$ Aufzinsungsfaktor

nachschüssige Rente



Endwert nach n-maliger nachschüssig gezahlter Rente $\quad S_n = \sum_{i=0}^{n-1} rq^i$

$$S_n = \sum_{i=0}^{i-1} rq^i = r\underbrace{\sum_{i=0}^{i-1} q^i}_{\frac{q^n-1}{q-1}} = r\frac{q^n-1}{q-1}$$

Beweis: für $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \dfrac{q^n-1}{q-1}$

1. Variante:

$$(q-1)\left(\sum_{i=0}^{n-1} q^i\right) = q\sum_{i=0}^{n-1} q^i - \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \sum_{i=0}^{n-1} q^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} q^i =$$

$$= q^n + q^{n-1} + \ldots + q^2 + q - q^{n-1} - q^{n-2} - \ldots - q - 1 = q^n - 1$$

2. Variante:

$$(q^n-1):(q-1) = q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1 = \sum_{i=0}^{n-1} q^i$$

$$\begin{array}{l}
\underline{q^n - q^{n-1}} \\
\quad q^{n-1} - 1 \\
\quad \underline{q^{n-1} - q^{n-2}} \\
\qquad q^{n-2} - 1 \\
\qquad \vdots \\
\qquad\quad q^2 - 1 \\
\qquad\quad q^2 - q
\end{array}$$

3. Variante: (vollständige Induktion)

JiA: $(n=1) \quad \sum_{i=0}^{1-i} q^i = q^0 = 1 = \dfrac{q^1-1}{q-1}$

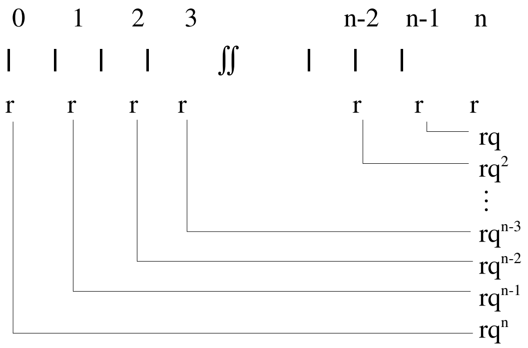
$$(n \to n+i)$$

<u>JiS:</u> $$\sum_{i=0}^{(n+1)-1} q^i = q^n + \sum_{i=0}^{n-1} q^i \overset{\text{I.Ann.}}{=} q^n + \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{q^n(q-1) + q^n - 1}{q-1}$$

<u>Beispiel:</u> Jemand zahlt 12 Jahre lang am Ende jedes Jahres 1000€ ein mit 7% Zinssatz mit Zinseszins.
Wie hoch ist der gesparte Betrag nach 12 Jahren?

$n = 12$
$r = 1000$
$i = 0{,}07$

Vorschüssige Rente



Endwert der n-mal vorschüssig gezahlten Rente

$${}_nS = rq + rq^2 + \ldots + rq^n = rq\,(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = rq \sum_{i=0}^{n-1} q^i = rq\,\frac{q^n - 1}{q-1}$$

$${}_{12}S = 19140{,}64$$

<u>Beispiel:</u> Jemand spart jedes Jahr am Jahresende 12000€ bei 7% Jahreszins mit Zinseszins. Nach wieviel Jahren wird er Millionär?

- nachschüssig
- $i = 0{,}07$; $q = 1{,}07$
- $r = 12000$
- $S_n = 1000000$

$$\boxed{S_n = r\frac{q^n - 1}{q-1}} \qquad \text{ges.: } n$$

$$S_n = r\frac{q^n - 1}{q-1}$$

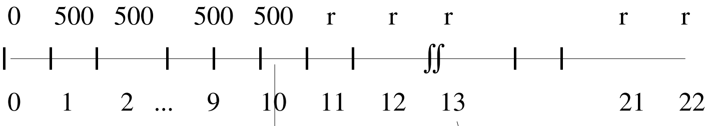
$$q^{n-1} = \frac{S_n}{r}(q-1)$$

$$q^n = \frac{S_n}{r}(q-1) + 1$$

$$n \log q = \log q^n = \log\left(\frac{S_n}{r}(q-1) + 1\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{S_n}{r}(q-1) + 1\right)}{\log q} \approx 28{,}4 \text{ Jahre}$$

Aufgabe: Jemand zahlt 10 Jahre lang am Ende jeden Jahres 500€ auf ein Konto ein.
Welchen Betrag kann er 12 Jahre lang jedes Jahr abheben, wenn die erste Auszahlung ein Jahr nach der letzten Einzahlung erfolgt und der Jahreszins 7% ist.



$$S_{10} = 500\frac{q^{10}-1}{q-1} \qquad ((S_{10}q-r)q-r)q-r$$

$$\underbrace{(\ldots(((S_{10}q-r)q-r)q-r)q-\ldots-r)q-r}_{\text{12 mal Auszahlung}} = 0$$

$$0 = S_{10}q^{12} - rq^{n} - rq^{10} - \ldots - rq - r = S_{10}q^{12} - r(\sum_{i=0}^{11} q^{i})$$

$$0 = S_{10}q^{12} - r\frac{q^{12}-1}{q-1}$$

$$r = s_{10}q^{12}\frac{q-1}{q^{12}-1} = 500\frac{q^{10}-1}{q-1}q^{12}\frac{q-1}{q^{12}-1} \approx 869{,}67$$

<u>Übung:</u> Welcher Betrag muß jedes Vierteljahr am 1.4.2003 beginnend, 120-mal eingezahlt werden, damit aus dem angesammelten Guthaben 60-mal am 1.7.2040 beginnend vierteljährlich 20000€ ausgezahlt werden können? Zinsgutschrift erfolgt vierteljährlich bei nominellem Jahreszins von 8%.

7.7. Tilgungsrechnung

Eine Schuld soll über mehrere Zinsperioden getilgt werden.

Zusätzlich zu den Tilgungsraten T_m der m-ten Zinsperiode sind Zinsen Z_m zu zahlen.

Notation:

n = Laufzeit = Anzahl der Zinsperioden bis zur Tilgung

R_0 = Anfangsschuld

R_m = Restschuld nach m Zinsperioden, $R_n = 0$

Z_m = Zinsen der m-ten Zinsperiode

T_m = Tilgung, Tilgungsrate der n-ten Zinsperiode

$A_m = T_m + Z_m$ = Annuität der m-ten Zinsperiode = Zahlung am Ende der m-ten Zinsperiode

<u>Rententilgung</u> (Rückzahlung gleicher Tilgungsraten $T_m = T$ $(m > 0)$)

<u>Beispiel</u>: 12000€ Schulden sind bei 7% Jahreszins mit jährlicher Tilgung von 1000€ zurückzuzahlen.

<u>Tilgungsplan:</u>

Abgelaufenes Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgungsrate	Annuität
m	R_m	Z_m	T_m	A_m
0	12000	0	0	0
1	11000	840	1000	1840
2	10000	770	1000	1770
3	9000	700	1000	1700
⋮	2000	⋮	⋮	⋮
11	1000	140	1000	1140
12	0	70	1000	1070

$$T = T_m = \frac{R_0}{n}$$

$$R_m = R_0 - m\,T = R_0 - m\frac{R_0}{n} = R_0\,(1 - \frac{m}{n})$$

$$Z_1 = R_0\,i$$

$$Z_m = R_{m-1}\,i = R_0\,(1 - \frac{m-1}{n})\,i = Z_1 - (m-1)\,T\,I$$

$$A_m = T_m + Z_m = \frac{R_0}{n} + R_0\,(1 - \frac{m-1}{n})\,i$$

<u>Annuitätentilgung</u> (Rückzahlung gleichgroßer Annuitäten $A = A_m$ (m > 0)

Rückzahlungen bilden eine nachschüssige Rente

$$R_0 = A \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{wobei } q = 1 + i$$

Beispiel: 12000€ Schulden sind in 12 Jahren mit konstanten Annuitäten bei 7% Jahreszins zu tilgen.

d.h. $A = R_0\,q^n \frac{q-1}{q^n - 1}$

$n = 12, R_0 = 12000, q = 1{,}07$

$A = 1510{,}82$

<u>Tilgungsplan:</u>

Abgelaufenes Jahr	Restschuld	Zinsen	Tilgung	Annuität
m	R_m	Z_m	T_m	A_m
0	12000	0	0	0
1	11329,18	840	670,82	1510,82
2	10611,4	793,04	717,78	1510,82
3	9843,38	742,8	768,02	1510,82
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	2731,66			
11	1417,06	191,22	1319,6	1510,82
12	0,08	98,84	1411,98	1510,82

$A = A_m = T_m + Z_m \quad Z_m = R_{m-1}\, i$

$T_m = A_m - Z_m$

$R_m = R_{m-1} - T_m = R_0\, q^m - A \dfrac{q^m - 1}{q - 1}$

$T_1 = A - R_0\, i$

$T_m = q^{m-1}\, T_1$

$T_m = A - T_m = A - T_1\, q^{m-1}$

8. Lineare Gleichungssysteme

Beispiel: Eine Firma stellt 3 Produkte P_1, P_2, P_3 her aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3

Rohstoffbedarfstabelle:

	P_1	P_2	P_3
R_1	2	2	2
R_2	0	2	2
R_3	8	4	8

Materialvorrat:

R_1	2 1 4
R_2	1 2 4
R_3	7 3 6

Wie viele Mengeneinheiten der Produkte P_1, P_2, P_3 lassen sich damit herstellen?

Mathematisierung:

Seien x_1, x_2, x_3 die Mengeneinheiten der hergestellten Produkte P_1, P_2, P_3. Dann müssen simultan gelten:

Verbrauch an R_1 → $2\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 = 214$ ← Lagerbestand für R_1

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 &= 214 \\ 0\,x_1 + 2\,x_2 + 2\,x_3 &= 124 \\ 8\,x_1 + 4\,x_2 + 8\,x_3 &= 736 \end{aligned}$$

Lineares Gleichungssystem, 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3

$x_1 = 45$
$x_2 = 30$ Lösung
$x_3 = 32$

Prüfen durch Einsetzen

Verallgemeinerung:

gegeben seien Zahlen $a_{ik} \in \mathbb{K}$ Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_2$

und $b_i \in \mathbb{K}$

für $i = 1, \ldots m$, $k = 1 \ldots n$, $m, n \in \mathbb{N}$ fest

gesucht ist ein n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, für welches folgende Gleichungen simultan gelten:

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots\, a_1\, n\, x_n &= b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned}$$

oder in Kurzform $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i$ für $i = 1, \dots, m$

<u>Definition:</u> (LG) heißt <u>Lineares Gleichungssystem</u> mit n Unbekannten x_k, $k = 1, ..., n$, und m Gleichungen. Die Zahlen a_{ik} heißen Koeffizienten und die b_i heißen rechte Seiten. Das System heißt <u>homogen</u>, falls alle $b_i = 0$ sind für $i = 1, ..., m$, ansonsten heißt es inhomogen. Die stes vorhandene Lösung $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ des homogenen Gleichungssystems heißt triviale Lösung.

Fragen im Zusammenhang mit (LG) sind:

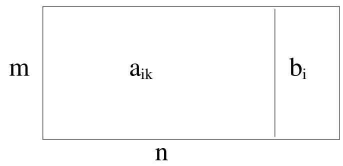
(A)Wann existieren Lösungstupel $(x_1, ..., x_n)$?

(B)Sind diese eindeutig bestimmt?

(C)Wie können Lösungen systematisch bestimmt werden?

<u>Spezialfälle</u>

Schema:



$* \neq 0$

Beispiel:

$$\begin{array}{rrrrl} 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 & & & = & -1 \\ & x_2 + 4x_3 + x_4 & & = & 0 \\ & & x_3 - 2x_4 & = & 9 \\ & & 5x_4 & = & -20 \\ & & & 0 = & 0 \end{array}$$

$2x_1 = 1 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \quad 2x_1 = 2 \quad \underline{\underline{x_1 = 1}}$

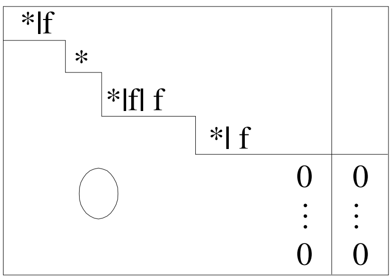
$x_2 = 0 - 4 \cdot 1 + 4 \quad \underline{\underline{x_2 = 0}} \quad \uparrow$

$x_3 = 9 + 2(-4) = 1 \quad \underline{\underline{x_3 = 1}} \quad \uparrow$

$\Rightarrow x_4 = -4 \quad \uparrow$

Typ (I) (eindeutiger Typ)

Typ (II) (mehrdeutiger Typ)



An den Stufenpositionen stehen Werte $* \neq 0$.

Die Variablen in den mit f markierten Positionen sind frei wählbar.

Werden die Terme an den mit f markierten Positionen auf die rechte Seite gebracht, so erhält man ein System vom Typ (I).

<u>Beispiel</u>:

$$\begin{array}{rrl} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - & x_5 = & -8 \\ & 2x_3 + 2x_4 + x_5 = & 14 \\ & 0 = & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_3 &= -8 + 3x_2 + x_5 & x_1 &= -2 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 + \frac{1}{4}x_5 \\ 2x_3 &= 14 - 2x_4 - x_5 & & \\ 0 &= 0 & x_3 &= 7 - x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{aligned}$$

wählen wir frei $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, so erhalten wir die mehrdeutige Lösung

$$x_1 = -2 + \frac{3}{4}c_1 - 7 + c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{4}c_3 = 9 + \frac{3}{4}c_1 + c_2 + \frac{3}{4}c_3 = -9 + \frac{3}{4}c_1 + 4 + \frac{3}{4}c_3$$

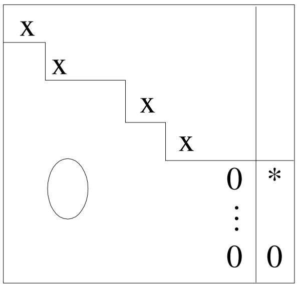
$$x_2 = c_1$$

$$x_3 = 7 - c_2 - \frac{1}{2}c_3$$

$$x_4 = c_2$$

$$x_5 = c_3$$

Typ (III) (unlösbarer Typ)



An den Stufenpositionen stehen wieder Werte $* \neq 0$ und in der Position des mit * gekennzeichneten b_j steht ebenfalls ein Wert $\neq 0$.

Das Gleichungssystem ist dann unlösbar, denn $0 = *$ ist für kein x_k lösbar.

Beispiel Typ (III):

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - \quad\quad x_5 &= 8 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 14 \\ 0x_4 + 0x_5 &= 7 \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{unlösbar}$$

Definition: Jedes lineare Gleichungssystem vom Typ (I), (II) oder (III) heiße System in Stufenform oder kurz S-System.

Ein beliebiges Gleichungssystem läßt sich mit dem Gauß-Algorithmus in ein S-System transformieren, so daß sich die Lösungsmenge nicht ändert.

Definition: Unter einer elementaren Umformung (Gauß-Schnitt) versteht man eine der folgenden Operationen:

(A) Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$.

(B) Zu einer Zeile wird das Vielfache einer anderen Zeile addiert.

(C) Zwei Zeilen werden vertauscht.

Beispiel:
$$\boxed{\begin{aligned} 0x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 10 \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 0x_4 &= 12 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 10 \\ 3 & 9 & -3 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

$Z_3 \supset Z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 9 & -3 & 0 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{3} Z_1 \supset Z_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$Z_2 \supset 2Z_1 \supset Z_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 8 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$\frac{-1}{2} Z_2 \to Z_2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 4 \end{array}$$

$Z_3 - Z_2 \to Z_3$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$

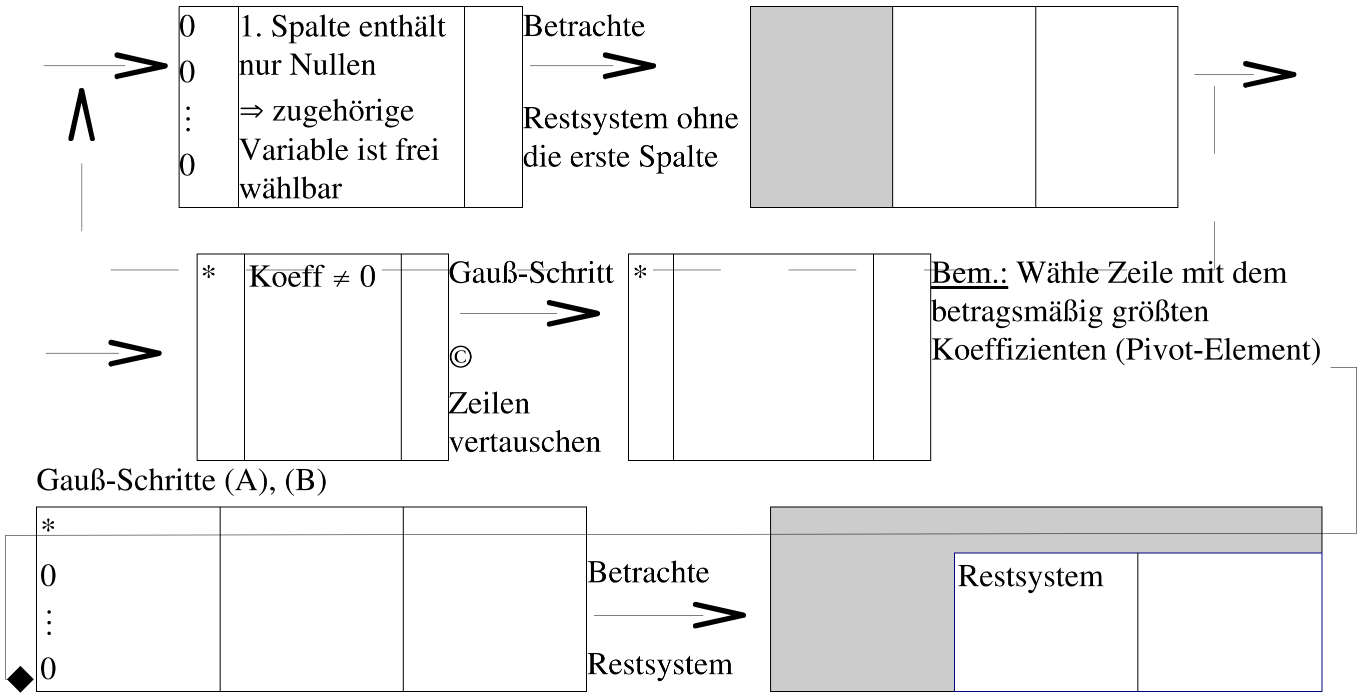
$x_2 - 4x_3 + x_4 = -1$

$x_3 + x_4 = 5$

$x_4 = c \quad x_3 = 5 - c \quad x_2$

<u>Satz:</u> Durch elementare Umformungen wird die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht verändert.

8.1. Gauß-Algorithmus (Umformung in System in Stufenform)



<u>Beispiel:</u> $x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 2$

$3x_1 - x_2 - 2x_3 = 26$

$5x_1 - 5x_3 = 50$

	1	-2	-2	2
$Z_2 - 3Z_1 \rightarrow Z_2$	3	-1	-2	26
$Z_3 - 5Z_1 \rightarrow Z_3$	5	0	-5	50
	1	-2	-2	2
	0	5	4	20
$Z_3 - 2Z_2 \rightarrow Z_3$	0	10	5	40
	1	-2	-2	2
	0	5	4	20
	0	0	-3	0

Stufenform Typ (I)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 4x_3 &= 20 \\ -3x_3 &= 0 \\ \hline x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$5x_2 + 40 = 20 \qquad \underline{\underline{x_2 = 4}}$

$x_1 - 24 - 20 = 2 \qquad \underline{\underline{x_1 = 10}}$

	1	-2	-2	2
	0	5	4	10
$Z_3 \frac{1}{-3} \rightarrow Z_3$	0	0	-3	0
	1	-2	-2	2
	0	5	4	20
$Z_2 - 4Z_3 \rightarrow Z_2$	0	0	1	0
	1	-2	-2	2
	0	5	0	20
$Z_2 \frac{1}{5} \rightarrow Z_2$	0	0	1	0
	1	-2	-2	2
	0	1	0	4
$Z_1 + 2Z_2 + 2Z_3 \rightarrow Z_1$	0	0	1	0
	1	0	0	10
	0	1	0	4
	0	0	1	0

Die Lösung ist also $(x_1, x_2, x_3) = (10, 4, 0)$

<u>Satz (Gauß'scher Algorithmus)</u>

Jedes lineare Gleichungssystem (LG) läßt sich durch elementare Umformungen in ein System in Stufenform der Gestalt

$$
\begin{aligned}
x_{r_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_{1n} x_n &= d_1 \\
x_{r_2} + \ldots\ldots\ldots + c_{2n} x_n &= d_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad & \;\vdots \\
x_{r_k} + \ldots + c_{kn} x_n &= d_k \\
0 &= d_{k+1} \\
&\;\vdots \\
0 &= d_m
\end{aligned}
$$

transformiert.

Dabei ist $1 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_k \le n$ und $1 \le k \le \min(\min)$.

Die Zahl k heißt <u>Rang</u> des linearen Gleichungssystems.

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn gilt $d_{k+1} - d_{k+2} = \ldots = d_m = 0$

Im Falle der Lösbarkeit sind die Variablen x_i mit Ausnahme von $x_{r_1}, \ldots, x_{r_k}$ frei wählbar.

Die Lösungsmenge enthält dann also n – k freie Parameter

<u>Beispiel:</u>

$$
\begin{aligned}
3x_2 + x_3 + x_5 &= 1 && \text{G1} \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= 2 && \text{G2} \\
2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 4 && \text{G3} \\
4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 &= 5 && \text{G4}
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
2 & 3 & 3 & -2 & 1 & 4 \\
4 & -3 & 3 & -4 & -1 & 5
\end{array}\right)
$$

$A_{11} \neq 0$, tausche 1. Zeile mit 2. Zeile

$\boxed{Z_1 \supset Z_2}$

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
2 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
2 & 3 & 3 & -2 & 1 & 4 \\
4 & -3 & 3 & -4 & -1 & 5
\end{array}\right)
$$

$A'_{11} \neq 0$: subtrahiere von der i-ten Zeile das $\frac{a'_{i1}}{a_{i1}}$-fache der 1-ten Zeile, i=2, 3, 4

$\boxed{\begin{array}{l} Z_2 - 0\,Z_1 \to Z_2 \\ Z_3 - Z_1 \to Z_3 \\ Z_4 - 2\,Z_1 \to Z_4 \end{array}}$

$$
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
2 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 6 & 2 & 0 & 2 & 2 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right)
$$

$Z_3 - \frac{6}{3} Z_2 \to Z_3$

$Z_4 - \frac{3}{3} Z_2 \to Z_4$

$A''_{22} \neq 0$: subtrahiere von der i-ten Zeile das $\frac{a''_{i2}}{a''_{22}}$-fache der zweiten Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$Z_1 + Z_2 \to Z_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\frac{1}{2} Z_1 \to Z_1$

$\frac{1}{3} Z_3 \to Z_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

S-System vom Typ (II)
m=4, n=5
$R_1 = 1$, $r_2 = 2$
k = 2 Rang = 2
n – k = 3 freie Parameter $(x_3, x_4, x_5) = (c_1\ c_2, c_3)$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$x_1 + x_3 - x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3} x_{¿}$$

Charakterisierung der Lösungsmenge $\mathscr{L}$(LG)

Addition „+" von n-Tupeln und Multiplikation „$\cdot$" von n-Tupeln mit Skalaren aus IK ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)

„+": $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

„$\cdot$": $Z(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

für $\lambda \in IK; (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in IK^n$

Zu obigem Beispiel erhalten wir als Lösungsmenge:

$$\mathscr{L}(LG) = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,0) + c_1(-1, -\frac{1}{3}, 1, 0, 0) + c_2(1,0,0,1,0) + c_3(0, -\frac{1}{3}, 0,0,1) \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Setzen wir $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) := (\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 0,0,0)$ und

$(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) := c_1(-1, -\frac{1}{3}, 1, 0,0) + c_2(-1, 0,0,1,0) + c_3(0, -\frac{1}{2}, 0,0,1)$,

so ist $(x_1, \dots, x_5) = (p_1, \dots, p_5) + (h_1, \dots, h_5)$ mit $(p_1, \dots, p_5) \in \mathscr{L}(LG)$ (für $c_1 = c_2 = c_3 = 0$) als <u>partikulärer</u> Lösung von (LG) und $(h_1, \dots, h_5) \in L(LG_0)$ einer Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems für jede Wahl von c_1, c_2, c_3.

$$\mathscr{L}(LG) = (p_1, \dots, p_n) + \mathscr{L}(LG_0)$$

<u>Satz:</u> Zwei Lösungen eines inhomogenen Gleichungssystems (LG) unterscheiden sich stets nur um eine Lösung des zugehörigen Gleichungssystems.

<u>Bemerkung:</u>

(1)Bei Gleichungssystemen, deren S-System vom Typ (I) (eindeutiger Typ) ist, hat das zugehörige homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung (0, ..., 0)

(2)Sind $(h_1, ..., h_n)$, $(h'_1, ..., h'_n)$ Lösungen des homogenen Gleichungssystems, so auch $\lambda_1(h_1, \dots, h_n) + \lambda_2(h'_1, \dots, h'_n)$ für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in IK$

Der <u>Rang</u> eines linearen Gleichungssystems vom Typ (min) ist die (maximale) Anzahl linear unabhängiger Gleichungen.

m Gleichungen $G_1, ..., G_m$ heißen linear abhängig, wenn sich mindestens eine dieser Gleichungen als Linearkombination der anderen schreiben läßt.

$$G_i = \lambda G_1 + \lambda_2 G_2 + \dots + \lambda_{i-1} G_{i-1} + \lambda_{i+1} G_{i+1} + \dots + \lambda_m G_m$$

Andernfalls heißen $G_1, ..., G_m$ linear unabhängig.

$G_3 = G_2 + 2G_1$ Statt Gleichungen können wir auch Zeilen in obigem Zeilen in
$G_4 = 2G_2 + G_1$ obigem Schema oder n-Tupel (bzw. (n+1)-Tupel) nehmen.