# Mathematik

## 1. Folgen und Reihen

### 1.1. Definition und Eigenschaften

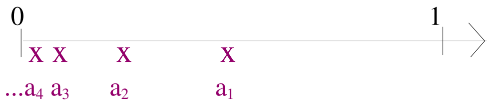
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | ... |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | ... |
| ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | ... |

<u>Definition.:</u> Unter einer Folge von Zahlen verstehen wir eine Abb. $\mathbb{N} \in \mathbb{R}$.
$a_1, a_2, \ldots$ heißen Glieder der Folge
$<a_n> = a_1, a_2, a_3, \ldots$

<u>Beispiele:</u>

a) $<a_n>$ mit $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$



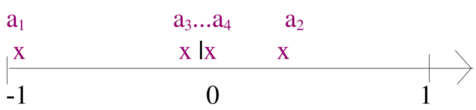

Bemerkung.: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} = q$

Definition.: geometrische Folge
Eine Folge $<a_n>$ mit dem Bildungsgesetz $a_n = aq^{n-1}$ heißt <u>geometrische Folge</u>.
$q \neq 0, q \neq 1, a \neq 0, n \in \mathbb{R}$
$a = a_1$!

b) $a_n = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}_0$
$<a_n> = 1, 3, 5, 7, \ldots$

c) $<a_n> = -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}$$




<u>Definition.:</u> Eine Folge $<a_n>$ heißt alternierend, wenn $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

d) $a_{n+1} = a_n^2 - 1 ; a_1 = 1$

rekursiv definierte Folge

$< a_n > = 1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots$

Definition.: Monotonie

Eine Folge $<a_n>$ heißt (streng) monoton wachsend, falls $a_{n+1} > (\geq)\ a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

(streng) monoton fallend $a_{n+1} < (\leq)\ a_n$

Beispiel: 1, 1, 2, 2, 3, 3, ...

Definition.: Beschränktheit

Eine Folge $<a_n>$ heißt nach oben (unten) beschränkt, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq k$ (bzw. $a_n \geq k$) $\forall\ n \in \mathbb{R}$

Ist die Folge nach oben und unten beschränkt, so heißt sie beschränkt.

Beispiele:

a) $a_n = \sqrt{3n+1}, n \in \mathbb{N}$

Behauptung: $<a_n>$ ist streng monoton wachsend und nach unten beschränkt.

Begründung: Zeige $a_{n+1} > a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{3(n+1)+1}}{\sqrt{3n+1}} = \sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} = \sqrt{\frac{(3n+1)+3}{3n+1}} = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{3}{3n+1}}_{>0}} > 1$$

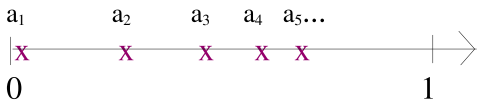
b)
$$a_n = \frac{n-1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots$$

Behauptung: $<a_n>$ ist streng monoton zunehmend

Begründung:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)} = \frac{n^2+n-n^2-n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$$



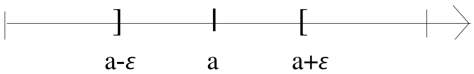

$a_9 = 0{,}8$

$a_{99} = 0{,}98$

$a_{999} = 0{,}998$

## 1.2. Grenzwert von Folgen

$\varepsilon$-Umgebung




Definition: Sei $<a_n>$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge.

Die Folge konvergiert gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt: zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein

$n_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft
$|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ a heißt <u>Grenzwert</u>

<u>Beispiel:</u>

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Behauptung: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0\,;\, a = 0$

Beweis:
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$
$$\underbrace{\frac{1}{\varepsilon}}_{n_0} < n$$
$$\varepsilon = \frac{1}{10} \Rightarrow n_0 = 10$$
$$\varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow n_0 = 100$$

Meistens gelingt die Berechnung der Grenzwerte mit folgenden <u>Grenzwertregeln</u>:
Seien $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ zwei konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, dann gilt:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \cdot \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}\,;\, b \neq 0$

d) $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim a_n}\,;\, a_n \geq 0$

e) $\dfrac{\lim 1}{c_n} = 0\,;\, \textit{falls} \lim |c_n| = \infty$

<u>Beweis:</u> vgl. Literatur

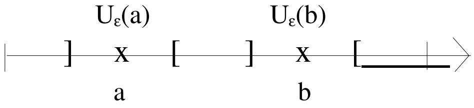
<u>Beispiel:</u>

$$a_n = \frac{n^2 + 2}{1 - 3n^2}$$

$$\lim_n a_n = \frac{\lim\limits_n \left( n^2 (1 + \overbrace{\frac{2}{n^2}}^{\to 0}) \right)}{\lim\limits_n \left( n^2 (\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} - 3) \right)} = \frac{1}{-3}$$

<u>Anmerkungen zum Grenzwert einer Folge</u>
<u>Satz:</u> Der Grenzwert einer Folge ist (falls er existiert) stets eindeutig.

<u>Beweis:</u>

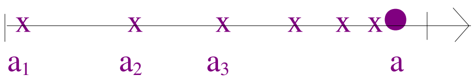



Anmerkung: $\langle a_n \rangle$ sei eine Folge mit $\lim_n a_n = a$ und $\lim_n a_n = b$ mit a ≠ b.

⇒ W!! (vgl. Skizze in Definition des Grenzwertes)

<u>Satz:</u> Jede monotone Folge, die beschränkt ist, besitzt einen Grenzwert.

<u>Beweis:</u> Sei $\langle a_n \rangle$ monoton wachsend




⇒ ✓

Beispiel:

a) $\langle a_n \rangle$ sei eine Folge mit $a_n = \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

Es gilt: $\boxed{\frac{\lim\limits_{n \to \infty} x^n}{n!} = 0}$

Beweis: Sei x>0

$$a_n = \frac{x^n}{n!} = \frac{x \cdot x^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} = \frac{x}{n} \cdot a_{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x}{n}$$

Behauptung: $\langle a_n \rangle$ ist streng monoton fallend für genügend große Werte n

$0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x}{n} < 1$ für alle n > x, d.h. $a_n < a_{n-1}$, also ist $\langle a_n \rangle$ streng monoton fallend.

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist zudem durch 0 nach unten beschränkt, da $0 \le a_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$

⇒ $\langle a_n \rangle$ besitzt einen Grenzwert, $\lim_n a_n = a$

$$\Rightarrow \lim_n a_n = \lim_n \left(\frac{x}{n} \cdot a_{n-1}\right) = \underbrace{\lim_n \frac{x}{n}}_{0} \cdot \underbrace{\lim_n a_{n-1}}_{a} = 0 \cdot a$$

$$\Rightarrow a = 0, q.e.d.$$

b) $a_1 = 1 ; a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} ; n = 1, 2, 3, \ldots$

$a_2 = \sqrt{2}$

$a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$

$a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$

$a_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}$

$a_5 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}}}$

zeige $\langle a_n \rangle$ besitzt einen Grenzwert!

$<a_n>$ ist durch 2 nach oben beschränkt

Sei $a_n<2$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$$

$$a_1 = 1 < 2$$

$\Rightarrow$ $<a_n>$ ist durch 2 beschränkt

$<a_n>$ ist streng monoton wachsend

Sei $a_{n-1} < a_n \Rightarrow$

$$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} < \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}$$

d. h. $a_n < a_{n+1}$

Da $a_1 < a_2$ folgt daraus, daß die Folge streng monoton wachsend ist.

$\Rightarrow \lim_{n} a_n = a$ existiert.

$$\underbrace{\lim a_{n+1}}_{a} = \lim \sqrt{1+a_n} = \sqrt{1+\lim_{n} a_n} = \sqrt{1+a}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{1+a} \Rightarrow a^2 = 1+a \Rightarrow a = \frac{1+(-)\sqrt{5}}{2}$$

Spezielle Grenzwertberechnung (vgl. Blatt 1 / Aufgabe 2)

Sei

$$a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}\,; \ldots n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_n = \frac{(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1})}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}} = \frac{2n+3-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}} = \frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

Beachte: $x+y = \dfrac{(x+y)(x-y)}{x-y}$ !

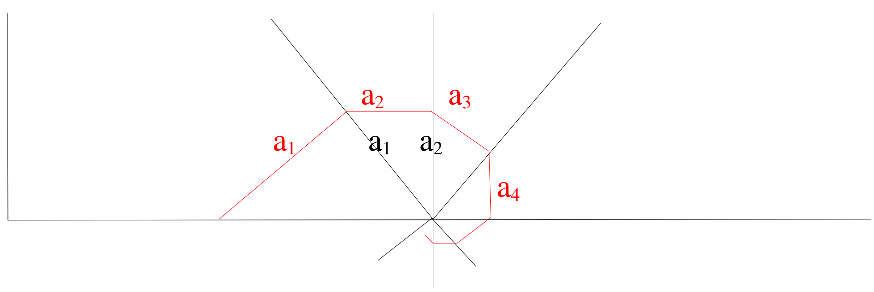
## 1.3. Die geometrische Folge und der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} q^n$

$<a_n>$ sei eine geometrische Folge, d. h.

$$a_n = a \cdot a^{n-1}\,; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}\,;\ q \text{ Quotient}$$

Beispiel:




Behauptung: $<a_n>$ ist eine geometrische Folge

Beweis: $a_1^2 = a_2^2 + a_2^2$

$$a_1^2 = 2a_2^2 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

analog: $$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^{1-n}$$

<u>Satz:</u> Sei $<a_n>$ eine Folge mit
$a_n = q^n$, n=1, 2, 3 ...
Dann gilt:
a) $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$
b) q = -1 ⇒ $<a_n>$ ist divergent
c) $q = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^n = 1$
d) |q| > 1 ⇒ $<a_n>$ ist divergent

<u>Beweis:</u>
a) $a_{n+1} = q^{n+1} = qa_n$ o.B.d.A. 0<q<1

- $<a_n>$ ist smf
  $a_{n+1} = \underbrace{q}_{<1} \cdot a_n < a_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$
  $<a_n>$ ist nach unten beschränkt
- $a_n = q^n \geq 0$
  $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ existiert
- $a = \lim\limits_{n} a_{n+1} = \lim\limits_{q} q \cdot a_n = q \cdot \lim\limits_{n} a_n = q \cdot a$ ✓
  $\Rightarrow a = q \cdot a$
  $a\underbrace{(1-q)}_{>0} = 0 \Rightarrow a = 0;$

Sei nun -1 < q < 0
$|a_n - 0| = |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n \to 0$
0<|q|<1
für n gegen unendlich

b) $<q^n>$=-1; 1; -1; 1; -1; ...
c) $<q^n>$ = 1; 1; 1; ...
d) siehe Literatur

## 1.4. Die geometrische Reihe

Werden die Folgenglieder einer geometrischen Folge addiert, so entsteht eine geometrische Reihe.

$$s_u = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$$s_u = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ endliche Reihe}$$

Für n → ∞ liegt eine unendliche Reihe vor.

Die Summenformel für die endliche bzw. unendliche geometrische Reihe:
Sei $<a_n>$ eine geometrische Folge mit

$$a_n = a \cdot q^{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \qquad (1)$$

$$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-\dots 1} \mid q$$

$$\underline{q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n} \qquad (2)$$

$$s_n - q s_n = a_1 - a_1 q^n \qquad (1)-(2)$$

$$s_n (1-q) = a_1 (1 - q^n)$$

$$\boxed{\Rightarrow s_n = a_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)}$$

Beispiel:

$$a_1 = 4, q = \frac{1}{2}\sqrt{2}, n = 8$$

$$s_8 = 4 \frac{1 - (\frac{1}{2}\sqrt{2})^8}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 12{,}8$$

$$s_{16} = 4 \frac{\dots}{\dots} = 13{,}6$$

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} 4 \frac{1 - \overbrace{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^n}^{\to 0}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = 4\frac{1}{4}$$

<u>Satz:</u> Die endliche geometrische Reihe

$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1}$

besitzt den Wert

$$s_n = \frac{a_1 \cdot 1 - q^n}{1-q}; q \neq 1$$

Für $|q| < 1$ und $n \to \infty$ ist die Reihe konvergent und es gilt:

$$s = a_1 \frac{1}{1-q}$$

Für $|q| > 1$ divergiert die Reihe.

<u>Beweis:</u> siehe Herleitung

<u>Beispiel:</u> Dezimalbrüche

$$Z = 0{,}444\dots = 0{,}\overline{4}$$

$$0{,}444\dots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots = \frac{4}{10} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots\right)}_{\text{unendliche geometrische Reihe mit } q = \frac{1}{10}} = \frac{4}{10}(1 \frac{1}{1 - \frac{1}{10}}) = \frac{4}{9}$$

## <u>1.5. Reihen</u>

<u>Definition.:</u> Sei $\langle a_n \rangle$ eine Folge. Dann heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die zur Folge $\langle a_n \rangle$ gehörende Reihe.

Die n-te Teilsumme der Reihe ist dabei $\sum_{k=1}^{n} a_k$ .

Wenn nun $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ existiert, dann heißt die Reihe konvergent, sonst divergent

<u>Beispiele:</u>

- geometrische Reihen:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2;$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\pm\ldots=\frac{1}{1-(\frac{-1}{2})}=\frac{2}{3}$$

- Sei $a_n=\frac{1}{n(n+1)}, n=1,2,3,\ldots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots$$

Es gilt: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

-

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\right)=1;$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

<u>Satz:</u> Hauptkriterium für konvergente Reihen (Cauchy)

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert,

mit $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right|<\varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und beliebiges $p \in \mathbb{N}$

<u>Beweis:</u> siehe Literatur

<u>Bemerkung:</u> $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \underbrace{a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}}_{\text{beliebig klein, falls n genügend groß!}} + \ldots$

<u>Folgerung</u>: Für p = 1 folgt:

Die Folge $\langle a_n \rangle$ einer konvergenten Reihe ist eine sogenannte Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$

<u>Beispiele:</u>

- $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 \pm ...$
  konvergiert nicht!
  $a_n = -(-1)^n\, n$ ist keine Nullfolge!
- Harmonische Reihe

  $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

  Problem: Konvergiert diese Reihe?

  Behauptung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert!

  Beweis:
  $$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots$$
  $$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \to \infty \text{, q.e.d}$$

  Bemerkung: Insbesondere im Fall einer divergenten Reihe versteht man unter $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ die Folge der Teilsummen, d.h.

  $s_1 = a_1$
  $s_2 = a_1 + a_2$
  $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$
  $\vdots$

  $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nur bei konvergenten Reihen

## 1.6. Weitere Konvergenzkriterien

Satz: Jede beschränkte Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent.

Beweis: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$
Da $\langle s_n \rangle$ streng monoton wachsend ist und zudem beschränkt ist, konvergiert $\langle s_n \rangle$, q.e.d.

Satz: Majoranten-Kriterium

Sind $\sum_n a_n$ und $\sum_n b_n$ Reihen mit nicht negativen Folgengliedern und $\sum_n b_n$ sei konvergent.

Gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $0 \leq a_n < C \cdot b_n$, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Beweis: $\sum_n a_n \leq \sum_n C \cdot b_n = C \cdot \sum_n b_n$

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ ist beschränkt und monoton wachsend $\Rightarrow$ Konvergenz

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

Es gilt: $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}\ ; n \geq 2$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}}_{1} = 2$$

<u>Bemerkung:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$;

<u>Satz:</u> Quotientenkriterium

Für fast alle n gelte $a_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = b$ .

Dann gilt für

- b < 1: Die Reihe $\sum_n a_n$ konvergiert.
- b > 1: Die Reihe $\sum_n a_n$ divergiert.
- b = 1: Keine Aussage möglich

<u>Beweis:</u> siehe Literatur
Vgl. mit geometrischer Reihe

<u>Beispiele:</u>

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ mit festem Wert $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_n \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_n \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ konvergent}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\lim_n \left| \frac{\frac{1}{(n+2)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim_n \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \lim_n \frac{n^2}{n^2 (1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\infty} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0})} = 1$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n} \frac{n}{n+1} = 1$$

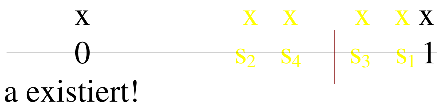
4. $$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} = \lim_{n} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{n}} \right| = \lim_{n} \left| \frac{(-1) \cdot n}{n+1} \right| = 1$$

Aussage mit Quotientenkriterium nicht möglich.

<u>Behauptung:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$$




$\Rightarrow$ a existiert!

<u>Satz:</u> Leibniz-Kriterium

Gegeben sei eine alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $|a_n|$ sei eine Nullfolge, die monoton fallend ist. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Fehlerabschätzung:

Mit $\lim_{n} a_n = a$ gilt:

$$|a - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

## 1.7. Umordnung von Reihen

Problem: Kann man in einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die Summanden umordnen?

Beispiele:

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots = (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + (1-1) + (1-1) + \ldots = -1$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \mp \ldots = a \quad \text{mit } \frac{1}{2} \le a \le 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \pm \ldots = \frac{1}{2}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \ldots\right)}_{a} = \frac{1}{2} a\,;$$

<u>Ergebnis:</u> Die Glieder einer Reihe dürfen nicht beliebig vertauscht werden!

<u>Definition:</u> Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

<u>Beispiel:</u> Geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n\,; -1 < q < 1$$

Diese Reihe ist absolut konvergent, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a \cdot q^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a| \cdot \underbrace{|q|^n}_{\in[0,1]} \text{ ist konvergent!}$$

Nicht jede konvergente Reihe ist auch absolut konvergent.

<u>Beispiel:</u> $\sum_{n} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent aber $\sum_{n} \frac{1}{n}$ divergent.

<u>Satz:</u> Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

<u>Beweis:</u> $\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \le C$ z.B. $|a+b| \le |a| + |b|$

<u>Satz:</u> Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe mit der Summe s. Dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe absolut mit dem gleichen Summenwert s.

<u>Beweis:</u> vgl. Lit.

<u>Beispiel:</u> $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = ?$

Es gilt: $\underline{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{\underline{9}} + \frac{1}{16} + \frac{1}{\underline{25}} + \frac{1}{36} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

Die Reihe ist offenbar absolut konvergent, also können die Summanden vertauscht werden.

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots}_{s} + \frac{1}{4}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots\right)}_{\frac{\pi^2}{6}} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$s + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6} \Rightarrow s = \frac{3}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$$

## 1.8. Die Exponentialreihe und die Zahl e

Satz: Für jede reelle Zahl x ist die Potenzreihe $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolut konvergent.

Beweis:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \left|\frac{x}{n+1}\right| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

⇒ Konvergenz nach Quotientenkriterium

1. Definition der Zahl e:

$$\boxed{e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

Merke: 0! = 1
1! = 1
2! = 1 · 2
3! = 1 · 2 · 3

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots$$

$$e = 2{,}71828182845$$

Abschätzung von e:

Satz:

$$e = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n} + r_{N+1} \text{ mit}$$

$$r_{N+1} \leq \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{N+2}{N+1}$$

Beweis: $r_{N+1}$ wird mit Hilfe einer geometrischen Reihe abgeschätzt.

$$r_{N+1} = \frac{1}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+2)!} + \frac{1}{(N+3)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{(N+2)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)} + \frac{1}{(N+2)(N+3)(N+4)} + \ldots\right)$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)!}\left(1 + \frac{1}{(N+2)} + \frac{1}{(N+2)^2} + \frac{1}{(N+2)^3} + \ldots\right) = \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{N+2}} =$$

$$= \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{N+2}{N+2-1} = \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{N+2}{N+1} \; q.e.d.$$

Beispiel: $N = 5$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + r_6 \quad \text{mit } r_6 \leq \frac{7}{6! \cdot 6} = 0{,}00162037\ldots$$

$$e = 2{,}716666\ldots$$

2. Definition der Zahl e:

Problem: Ein Kapital k verzinse sich im Jahr mit 100%. Die Zinsen werden 12-mal (bzw. 365-mal, n-mal) pro Jahr dem Kapital zugeschlagen. Wie groß ist das Kapital nach 1 Jahr?

1. Januar: $k_0$

1. Februar: $k_1 = k_0 + \frac{1}{12} k_0 = k_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)$

1. März: $k_2 = k_1 + \frac{1}{12} k_1 = k_1 \left(1 + \frac{1}{12}\right) = k_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^2$

1. April: $k_3 = k_2 + \frac{1}{12} k_2 = k_2 \left(1 + \frac{1}{12}\right) = k_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^3$

⋮

1. Januar: $k_{12} = k_0 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12}$ ; monatliche Verzinsung!

$k_{365} = k_0 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365}$ ; tägliche Verzinsung

$k_n = k_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$ ; bei n-maliger Verzinsung

Satz: $\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e}$

Beweis:

1. Schritt: Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist monoton wachsend.

2. Schritt: Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist durch e nach oben beschränkt.

3. Schritt: $\lim_{n \to \infty} a_n \geq e$

Details siehe Literatur

# 2. Differentialrechnung

## 2.1. Funktionen und Funktionengrenzwert

f: D → ℝ

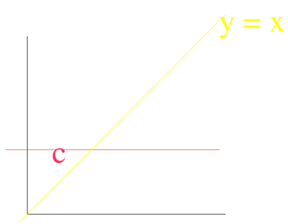
D heißt Definitionsmenge

$G_f = \{(x \mid y) \mid y = f(x)\}$ Graph von f.

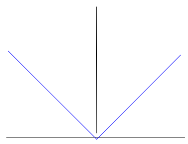
Beispiele:

a) Konstante Funktion
   x → y = c

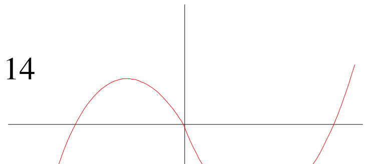
b) Identische Abbildung
   x → y = x




c) Betragsfunktion
   x → y = |x|



d) Polynomfunktionen n-ten Grades



$x \rightarrow y = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$
$a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.
z. B.: $y = x^3 - 4x$

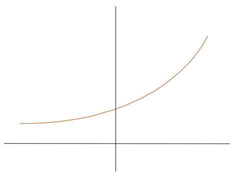
e) Rationale Funktionen

$$x \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$$

p, q Polynomfunktionen

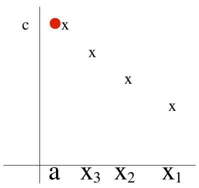
f) Exponentialfunktion

$x \rightarrow e^x$



<u>Definition:</u> Funktionengrenzwert

f hat für $x \rightarrow a$ den rechtsseiten Grenzwert c, wenn für jede Folge $<x_n>$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ und $x_n > a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ die Folge $<f(x_n)>$ gegen c strebt.




<u>Bemerkung:</u>

- Schreibweise: $\lim\limits_{x \to a_+} f(x) = c$ rechtsseiteiger Grenzwert

  analog $\lim\limits_{x \to a_-} f(x) = c$ linksseitiger Grenzwert
- $a = +\infty$ bzw. $a = -\infty$ ist möglich
- $c = \pm\infty$ uneigentliche Grenzwerte

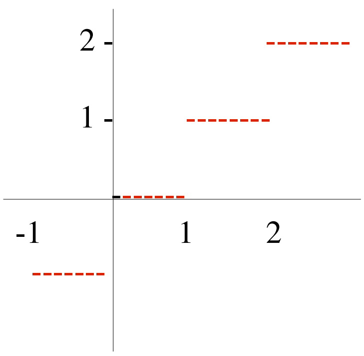
<u>Beispiele:</u>

a) Gaußsche Klammerfunktion

$x \rightarrow [x]$

[x] bedeutet für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

[2, 7] = 2, [0,991] = 0, [-1, 2] = -2




Sei $M \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to m_+} [x] = m$$

$$\lim_{x \to m_-} [x] = m - 1$$

b) $$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

## <u>Berechnung von Grenzwerten</u>

A) Grenzwertregeln (vgl. Folgen)

<u>Satz:</u> Aus $\lim_{x \to a} f(x) = c$ und $\lim_{x \to a} g(x) = d$ folgt

(1) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = c \pm d$

(2) $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = c \cdot d$

(3) $\dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{g(x)} = \dfrac{c}{d}, d \neq 0$

(4) $\lim_{x \to a} h(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \to a} \dfrac{1}{h(x)} = 0$

<u>Beweis:</u> s. Lit.

Beispiel: $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 4x + 5}{3x^2 + 8x - 10} = \frac{\lim_{x \to 1} (x^3 + 4x + 5)}{\lim_{x \to 1} (3x^2 + 8x - 10)} = \frac{10}{1} = 10;$$

B) Umformen von Funktionstermen

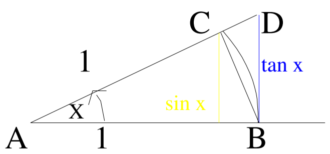
Beispiel: $$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)}{x - 1} = \underline{n};$$

C) Vergleichskriterium

<u>Satz:</u> Gilt $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ in einer Umgebung von a, und ist $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = c$, dann gilt auch $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

<u>Beweis:</u> ✓

<u>Beispiel:</u> $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} =$



$$F_{\widehat{ABC}} = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2};$$

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$$

$$F_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{1}{2} \tan x$$

$$F_{ABC} \leq F_{\widehat{ABC}} \leq F_{ABC}$$

$$\frac{1}{2} \sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x \mid \cdot 2$$

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \mid : \sin x$$

$$2 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

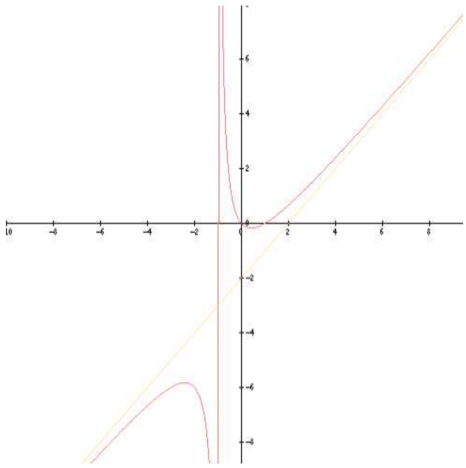
$$\underbrace{1}_{\to 1\text{, für } x \to 0} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \underbrace{\cos x}_{\to 1\text{, für } x \to 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

<u>Asymptoten:</u>

Problem: Wie verhält sich eine Funktion für x ➔ ∞?

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x(x-1)}{x+1}, x \neq -1$



$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1} = (x^2 - x) : (x+1) = \underbrace{x - 2}_{g(x)} + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\to 0\text{, für } x \to \infty}$$

$$\begin{array}{l} -\underline{(x^2 + x)} \\ \quad -2x \\ \quad -\underline{(-2x - 2)} \\ \qquad\qquad 2 \end{array}$$

g ist eine schräge Asymptote.

## <u>2.2. Stetigkeit</u>

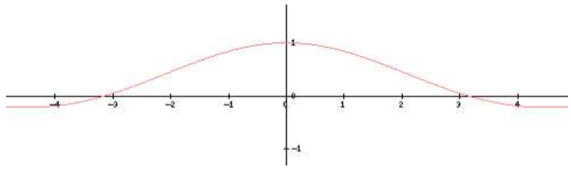
<u>Definition:</u> Eine Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in D_f$ stetig, falls $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ist f stetig an allen Stellen $x_0$ des Definitionsbereichs, dann heißt f stetig.

Beispiele:

a) f:x → [x], $x \in \mathbb{R}$
   f nicht stetig, falls $x \in \mathbb{Z}$!
   f nicht stetig, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
   vgl. Abbildung

b) $f : x \rightarrow \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   stetig für $x \neq 0$



c) $f : x \rightarrow \frac{\sin x}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

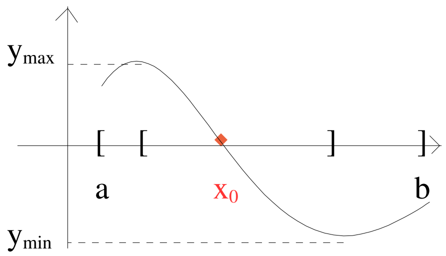
   $\overline{f} : x \rightarrow f(x), x \neq 0$
   $\qquad 1, x = 0$
   $\overline{f}$ ist stetig Fortsetzung von f.

## Sätze über stetige Funktionen

Es sein f eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall [a, b]. Dann gilt:

1. f nimmt auf [a, b] ihr Maximum und Minimum an.
2. Es sei f(a) > 0 und f(b) < 0 oder umgekehrt, dann gibt es eine Stelle $x_0 \in ]a; b[$ mit $f(x_0)=0$

Beweis: siehe Literatur

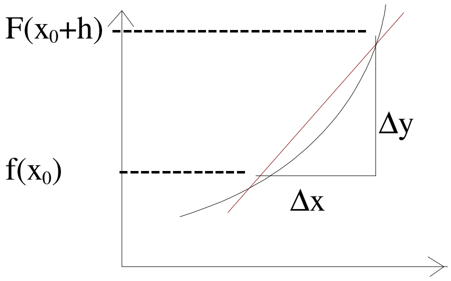



Anwendung: Nullstellenberechnung durch Bisektion

Beispiel: $f(x) = x^5 + x + 1$
   f(-1) = -1 < 0
   f(0) = 1 > 0
   $\Rightarrow \exists x_0 \in [-1; 0]$ mit $f(x_0) = 0$


   f(-0,5) = 0,46875 > 0
   $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [-1; -\frac{1}{2}]$ mit $f(x_0) = 0$
   f(-0,75) = 0,0127 > 0
   $\Rightarrow \exists x_0 \in [-1; -0{,}75]$
   f(-0,875) = -0,388
   $\Rightarrow \exists x_0 \in [0{,}875; 0{,}75]$
   ⋮

## 2.3. Die Ableitung von Funktionen




Die Steigung der Sekante beträgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

<u>Definition:</u> f heißt in $x_0$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\frac{\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=:f'(x_0) \quad \text{existiert.}$$

F'($x_0$) heißt 1. Ableitung von f an der Stelle $x_0$.

<u>Beispiele:</u>

a) $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$

c) $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n+1}, n \in \mathbb{N}$

d) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x>0$

<u>Beweis:</u> a, b, ✓

c) Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1}+b^n$$

$$f(x)=x^n\Rightarrow$$

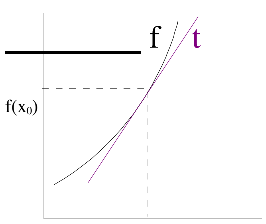
$$f'(x)=\frac{\lim\limits_{n\to 0}(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{\lim\limits_{h\to 0} x^n+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot h+\ldots+\binom{n}{n-1}x\cdot h^{n-1}+h^n-x^n}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}\cdot h+\ldots+h^{n-1}\right]=n\cdot x^{n-1}; \text{q.e.d}$$

c) $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow$ ✓

$$f'(x)=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{\lim\limits_{h\to 0} x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{h})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

<u>Deutung der Ableitung</u>



$x_0$

In einer genügend kleinen Umgebung von $x_0$ stimmen die Funktionswerte relativ gut mit den Funktionswerten der Tangente überein.

T approximiert f in einer Umgebung von $x_0$.

T: $y = m \cdot x + b$; $\quad m = f'(x_0)$

$f(x_0) = m \cdot x_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - mx_0$;

$\Rightarrow$ t: $y = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

$$\boxed{t: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

<u>Beispiel:</u>

$$\sqrt{2} = ?$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$t: y = \frac{1}{2\sqrt{1{,}96}} \cdot (x - 1{,}96) + \sqrt{1{,}96}$$

$$y = \frac{1}{2{,}8}(x - 1{,}96) + 1{,}4$$

Für x = 2 folgt:

$$y = \frac{1}{2{,}8}(2 - 1{,}96) + 1{,}4 = 1{,}4142857$$

Vgl.: $\sqrt{2} = 1{,}41421356$

## Ableitungsregeln

Sind f und g differenzierbar, dann gilt:

$(f \mp g)' = f' \mp g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot f' - g' \cdot f}{g}$$

<u>Beweis:</u> Produktregel

Sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{\lim\limits_{h \to 0} h(x+h) - h(x)}{h} = \frac{\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[ f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] =$$

$$= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x), \text{q.e.d}$$

<u>Beispiele:</u>

a) $f(x) = 3x^7 - 5x^3 + 9 \Rightarrow f'(x) = 21x^6 - 15x^2$

b) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 \cdot 1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2} x\sqrt{x} = \frac{5}{2} x\sqrt{x}$;

c) $f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{0-1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$;

d) $f(x)=\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{0-1\cdot n\cdot x^{n-1}}{(x^n)^2}=-n\cdot x^{n-1-2n}=-n\cdot x^{-n-1};$$

Wichtige Ableitungsfunktionen

$f(x)=xn \Rightarrow f'(x)=n\cdot xn-1, n\in \mathbb{Z}$

$f(x)=\sin x \Rightarrow '(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$

$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$

Beweis: Sei f(x) = sin x

$$f'(x)=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\ \sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\ 2\cdot\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim\ \cos\frac{2x+h}{2}\cdot\underbrace{\frac{\sin\overbrace{\frac{h}{2}}^{z}}{\underbrace{\frac{h}{2}}_{z}}}_{\to 1}=\cos x$$

Beispiele:

$[(x^2 + 5 \sin x)\cdot\cos x]' = (2x + 5 \cos x)\cdot\cos x + (x^2 + 5 \sin x)\cdot(-\sin x) = 2x \cos x + 5 \cos^2 x - x^2 \sin x - 5 \sin^2 x$;

$[\sin x\cdot\cos x]' = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$;

$[\sqrt{x}\cdot\sin x]'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin x+\sqrt{x}\cos x$

## Die Kettenregel

Problem: $[\sqrt{x^2+1}]'=?$

$f(x)=\sqrt{x}$ äußere Funktion

$g(x)=x^2+1$ innere Funktion

$\Rightarrow f(g(x))=\sqrt{x^2+1}$

Es gilt: $[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

Begründung: $\frac{\Delta f(g(x))}{\Delta x}=\frac{\Delta f(g(x))}{\Delta g(x)}\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\to f'(g(x))\cdot g'(x)$

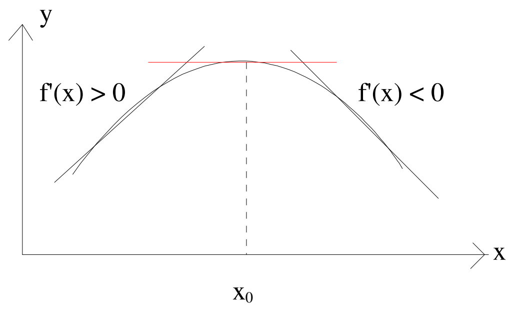
Beispiele:

$g(x) = (x^4 + 6x + 5)^3 \Rightarrow g'(x) = 3\cdot(x^4 + tx + 5)^2\cdot(4x^3 + 6)$

$f(x) = \sin(ax + b) \Rightarrow f'(x) = a\cdot\cos(ax + b)$

$f(x) = [\sin(x^4 + 2x)^2]^5 \Rightarrow f'(x) = 5\cdot[\sin(x^4 + 2x)^2]^4\cdot\cos(x^4 + 2x)^2\cdot 2(x^4 +2x)\cdot(4x^3 + 2)$

## 2.4. Monotonie, Maxima und Minima

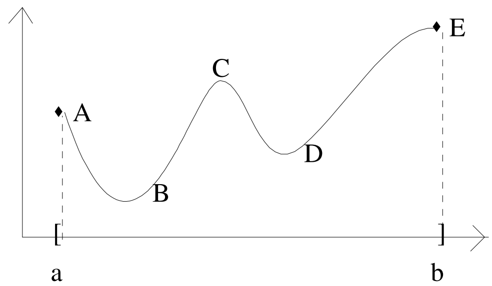



Satz: Eine Funktion f ist in einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$
streng monoton wachsend, falls $f'(x) > 0 \;\forall\; x \in I$.
Analog: streng monoton fallend, falls $f'(x) < 0 \;\forall\; x \in I$.

Beweis: siehe Skizze und Literatur

Satz: Ist f auf I differenzierbar, so gilt:
$x_0 \in I$ lokales Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Beweis: siehe Literatur




A: lokales Maximum

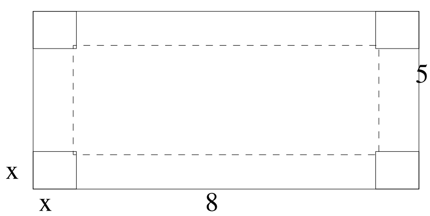
B: lokales und globales Minimum

C: lokales Maximum

E: lokales und globales Maximum

Anwendungen:

1.




Aus einer Blechplatte soll eine quaderförmige, nach oben geöffnete Wanne mit maximalem Volumen geformt werden. Welche Seitenlänge müssen die abgeschnittenen Quadrate besitzen?

$$f(x) = (8-2x)\cdot(5-2x)\cdot x \qquad x \in \,]0;2{,}5[$$

$$= (8-2x)\cdot(5x-2x^2) = (40x-16x^2-10x^2+4x^3) = 4x^3-26x^2+40x$$

$$f'(x) = 12x^2-52x+40 =: 0$$

$$3x^2-13x+10=0$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169-120}}{6} = \frac{13 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3\frac{1}{3} \quad \text{entf.}$$

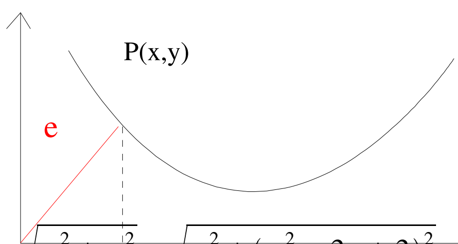
$$f'(x) = 3(x^2-\frac{13}{3}x+\frac{10}{3}) = 3\cdot(x-1)(x-\frac{10}{3})$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $3\,(x-1)$ | - | 0 | + | | + |
| $x-\frac{10}{3}$ | - | | - | 0 | + |
| f'(x) | + | 0 | - | 0 | + |
| F | smw | | smf | | smw |
| | | 1 | | $\frac{10}{3}$ | |

⇒ lokales Maximum für x = 1

⇒ Maximum Volumen: f(1)=

2. Gegeben: $f(x) = x^2 - 3x + 3$
   Gesucht: Welcher Punkt $P_0$ des Graphen besitzt vom Ursprung den kleinsten Abstand?




$$e = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(x^2-3x+3)^2} = \sqrt{x^4-6x^3+6x^2+9x^2-18x+9+x^2} =$$

$$= \sqrt{x^4-6x^3+16x^2-18x+9}$$

Sei $e^2 = f$

⇒ $f(x) = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 18x + 9$

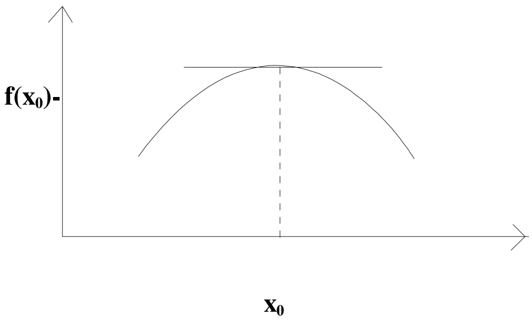
$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 32x - 18$

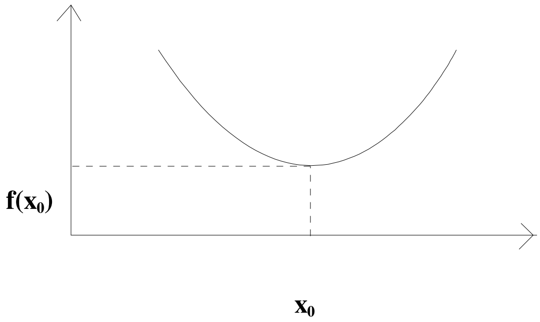
$f'(x) = 0 \qquad x_1 = 1$

⇒ Maximales Volumen: $f(1) = (4x^3 - 18x^2 + 32 - 18) : (x - 1) = ...$

## 2.5. Anwendung höherer Ableitungen

### a) Extremwerttest




Satz: Es sei f ein einer Umgebung von $x_0$ mindestens 2-mal stetig differenzierbar, dann gilt:

- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ lokales Maximum
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ lokales Minimum

Beweis: $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f'$ ist in einer Umgebung von $x_0$ streng monoton fallend.
$F'(x_0) = 0$

Demnach besitzt f' an der Stelle $x_0$ einen Vorzeichenwechsel von + nach -. $\Rightarrow$ An der Stelle $x_0$ liegt ein lokales Maximum vor. (vgl. Abbildung)

Analoge Begründung für Minimum!

### b) Wendepunkte und Krümmung:

Es gilt:
$f''(x) > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt
$f''(x) < 0 \Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt

Geht in einem Punkt die Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung über (oder umgekehrt), so liegt ein Wendepunkt vor.

Satz:
$f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0$
$\Rightarrow$ an der Stelle $x_0$ liegt ein Wendepunkt vor.

Beispiele:

a) $f(x) = \sin x,\ x \in [0, 2\pi]$
$f'(x) = \cos x$
$f''(x) = -\sin x$
$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi$
$f'''(x) = -\cos x$
$f'''(0) = -1 \neq 0$
$f'''(\pi) = 1 \neq 0$
$f'''(2\pi) = -1 \neq 0$
$\Rightarrow W_1(0/0),\ W_2(\pi/0),\ W_3(2\pi/0)$

b) $f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$ $\geq 0 \rightarrow$ Linkskrümmung $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ kein WP
$f'''(x) = 24x$
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ $f'''(0) = 0$ $\rightarrow$ Satz nicht anwendbar!

## 2.6. Die Regeln von l'Hospital:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{, wobei}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ od.} \infty \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \text{ od. } a = \infty$$

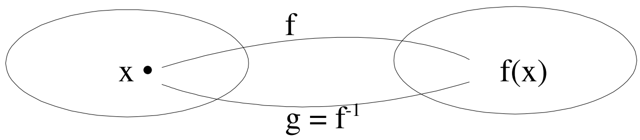
Beispiele:

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 4x + 5}{4x^3 - 7x} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + 14x - 4}{12x^2 - 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{12x + 14}{24x} = \lim_{x \to \infty} \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

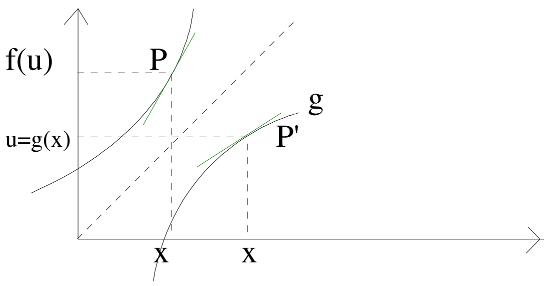
2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

3. $\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0$

## 2.7. Die Ableitung einer Umkehrfunktion




| Es gilt: $g(f(x)) = x$ |
|---|
| $f(g(x)) = x$ |




## 2.8. Die Exponential- und Logarithmusfunktion

Wiederholung: $\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

Definition: Die Funktion $x \rightarrow e^x$ , $x > 0$ heißt Exponentialfunktion oder e-Funktion.

Bemerkung: Vgl. Übungsblatt Nr. 3

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

Eigenschaften:

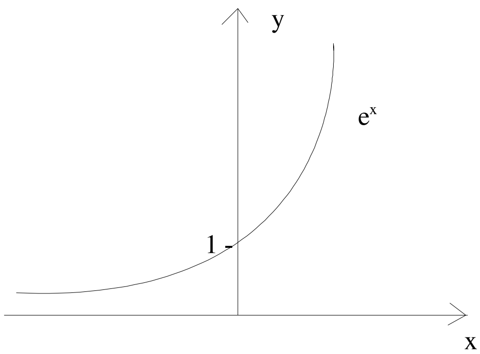
a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Begründung:

$$\left[ \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n \right]' = \lim_{n \to \infty} ([1 + \frac{x}{n}]^n)' = \lim_{n \to \infty} n \cdot [1 + \frac{x}{n}]^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n}_{\to e^x} \cdot \underbrace{(1 + \frac{x}{n})^{-1}}_{\to 1} = e^x$$

b) $e^0 = 1$

c) <u>Graph:</u>




d) Monotonie, Krümmung:
$f'(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ f ist smw
$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt

e) $\lim\limits_{n \to \infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

<u>Beweis:</u> $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n-1) \cdot x^{n-2}}{e^x} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n-1) \ldots \cdot 1}{e^x} = 0$

<u>Anwendung:</u> Zerfallsgesetz

Geg.: $t = 0$ $\quad N_0$ Atome

Die Anzahl der momentan zerfallenden Atome ist direkt proportional zur Anzahl der momentan vorhandenen Atome:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \sim N(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = -k \cdot N(t)$$

$$\boxed{N'(t) = -k \cdot N(t)}$$

Lösung: $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}}$

$$N_{(0)} = N_0$$

## **<u>Der natürliche Logarithmus</u>**

Die Exponentialfunktion $f: x \rightarrow e^x$ ist streng monoton wachsend, also umkehrbar.

$f: x \rightarrow y = e^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+$

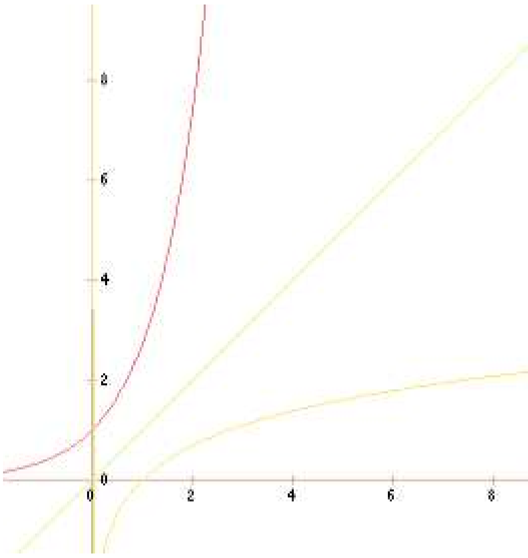
$\log_e y = x$

$\log_e x = y$

$g: x \rightarrow y = \log_e x$, $D_g = \mathbb{R}^+$, $W_g = \mathbb{R}$

<u>Vereinbarung</u>: $\log_e x = \ln x$

$g: x \rightarrow y = \ln x$, $x > 0$




Ableitung der ln-Funktion:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))};$$

Sei f(x) = $e^x$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},\ x > 0$$

$$\boxed{[\ln(x)]' = \frac{1}{x}}\quad ,\ x > 0$$

<u>Beispiele:</u>

$$f(x) = \ln(2x+1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2$$

$$f(x) = \ln(x^2) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2}\, 2x = \frac{2}{x}$$

Gleichungen für Logarithmen:

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y \\ \ln x^n = n \cdot \ln x \end{array}}$$

<u>Beispiele:</u>

$$\ln e^3 = \underbrace{3 \cdot \ln e}_{1} = 3$$

$$\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Diskussion von ln-Funktionen:

1. $f(x) = x^2 \ln x,\ x > 0$

   Nullstellen: <u>x = 1</u>

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$$

$$f''(x) = 1 \cdot (2\ln x + 1) + x \cdot (\frac{2 \cdot 1}{x} + 0) = 2\ln x + 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$e^{\ln x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(e^{-\frac{1}{2}}) = 2 > 0 \Rightarrow Min(e^{-\frac{1}{2}} / -\frac{1}{2e})$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2\ln x + 3 = 0$$

$$\ln x = -\frac{3}{2}$$

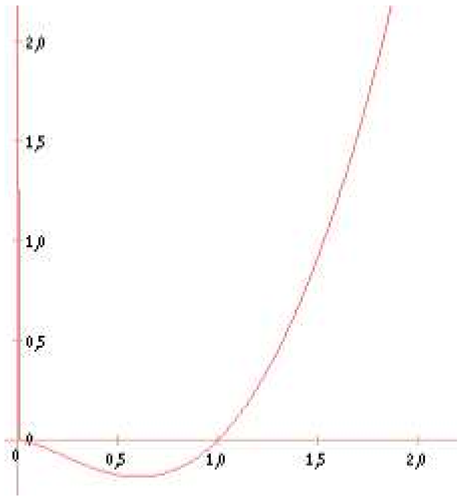
$$e^{\ln x} = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-3}{2e^3}$$

$$\Rightarrow W(e^{-\frac{3}{2}} / -\frac{3}{2e^3})$$

Begründung: $f'''(x) = \frac{2}{x} \neq 0$ für $x = e^{-\frac{3}{2}}$



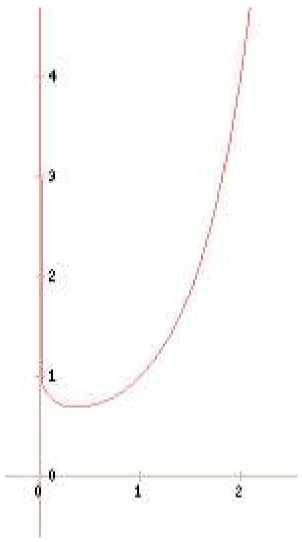

2. $f(x) = x^x \quad x > 0$

$$f(x) = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{x\ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + \frac{x \cdot 1}{x}) = \underbrace{(1 + \ln x) \cdot e^{x \ln x}}_{>0}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0$$

$$x = e^{-1}$$




Bemerkung: $\lim_{x \to 0} x^x = 1$

$TP(e^{-1} / \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}})$ Nachweis über Monotonie oder 2. Ableitung

# 3. Potenzreihen

## 3.1. Definition

Die Reihe vom Typ $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ heißt Potenzreihe.

$a_1$, $a_2$, ... heißen Koeffizienten.

Eine allgemeinere Definition lautet: $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

$x_0$ heißt Entwicklungspunkt.
Da $z = x - x_0$ die Entwicklung der Reihe im Punkt 0 liefert, wird im Folgenden die einfachere Version betrachtet.

Beispiele:

a) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

b) $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Zentrale Probleme:

1. Für welche reellen Zahlen konvergiert eine gegebene Potenzreihe und welchen Funktionsterm stellt sie gegebenenfalls dar?
2. Kann man einen gegebenen Funktionsterm f(x) durch eine geeignete Potenzreihe darstellen?

## 3.2. Konvergenzradius

Sei $x_1 \in \mathbb{R}$

$$P(x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

Besitzt diese Reihe einen Grenzwert, so konvergiert die Potenzreihe für x = $x_1$.

Für x = 0 konvergiert jede Potenzreihe.

Konvergenzgebiet einer Potenzreihe:

Divergenz Konvergenz Divergenz

x = -r 0 x = r

r heißt Konvergenzradius.

Für |x| = r kann keine allgemeine Aussage zur Konvergenz getroffen werden.

Beispiele:

a)
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = 1 - \frac{1}{x}$$
$$r = 1$$

Die geometrische Reihe konvergiert für |x| < 1

b)
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Wiederholung Quotientenkriterium:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert, falls } \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1$$

$$r = \infty$$

c)
$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)! \cdot x^{n+1}}{n! \cdot x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} |(n+1) \cdot x| \to \infty$$

$$r = 0$$

Berechnung von r:

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe kann über den Grenzwert $r = \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$ bestimmt werden, falls dieser existiert.

Beweis: Sei |x| < r

$$|\frac{a_{n-1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}| = |\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x| = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot |x| <$$

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot r = |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot \lim_{n \to \infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = 1$$

Beispiele zu Potenzreihen:

a) $$f(x)=\frac{1}{2-3x}=\frac{1}{2\cdot(1-\frac{3}{2}x)}=\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{3}{2}x+(\frac{3}{2}x)^2+\dots)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3}{2})^n x^n;$$

$$|\frac{3}{2}x|<1\Rightarrow|x|<\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow r=\frac{3}{2};$$

b) $$f(x)=\frac{2}{3+8x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{8}{3}x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{8}{3}x)}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{8}{3}x)^n=\frac{1}{3}\sum(-1)^n\cdot(\frac{8}{3})^n\cdot x^n;$$

$$|-\frac{8}{3}x|<1\Rightarrow|x|<\frac{3}{8}$$

$$r=\frac{3}{8}$$

c) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n=\frac{1}{1-\frac{x}{3}}=\frac{3}{3-x};$$

$$r=3$$

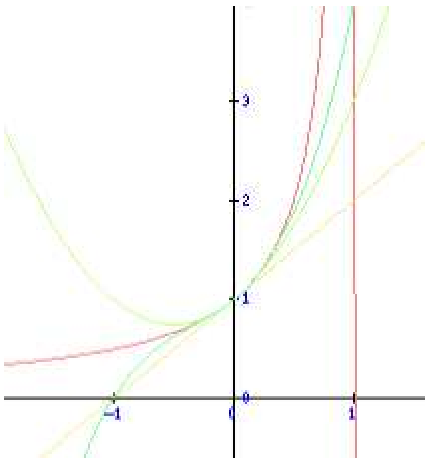
d) $$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots$$

$$f_1(x)=1+x$$

$$f_2(x)=1+x+x^2$$

$$f_3(x)=1+x+x^2+x^3$$

$\vdots$



## 3.3. Eigenschaften von Potenzreihen

a) Eine konvergente Potenzreihe konvergiert innerhalb ihres Konvergenzbereichs stets absolut
b) Potenzreihen kann man summandenweise differenzieren (und integrieren) innerhalb des Konvergenzbereichs
c) Zwei Potenzreihen können innerhalb eines gemeinsamen Konvergenzgebiets addiert und subtrahiert werden.

Beispiel:

$$P_1(x)=1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x}$$

$$P_2(x)=1+2x+3x^2+4x^3+\dots=\frac{1}{(1-x)^2};$$

## 3.4. Potenzreihenentwicklung einer Funktion

Problem: Zu einer (beliebigen) Funktion f soll eine Potenzreihenentwicklung vom Typ

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ angegeben werden.

Wie ergeben sich die Koeffizienten $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... ?

Annahme: Es sei f eine beliebig oft differenzierbare Funktion und die Potenzreihenentwicklung existiert.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + x_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \ldots$$
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 + \ldots$$
$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + 4 \cdot 5a_5 x^3 + 5 \cdot 6a_6 x^4 + \ldots$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5 x^2 + 4 \cdot 5 \cdot 6a_6 x^3 + \ldots$$
$$f^{(4)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5 x + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6a_6 x^2 + \ldots$$
$$f^{(5)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a_5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6a_6 x + \ldots$$

Sei x = 0 ⇒

$$f(0) = a_0$$
$$f'(0) = a_1$$
$$f''(0) = 2a_2$$
$$f'''(0) = 2 \cdot 3a_3$$
$$f^{(4)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4$$
$$f^{(5)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$a_0 = f(0)$$
$$a_1 = f'(0)$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$
$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$
$$a_3 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!}$$
$$\vdots$$
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Es gilt: Unter relativ allgemeinen Bedingungen läßt sich jede unendlich oft differenzierbare Funktion f in eine Potenzreihe der Form

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \ldots$$ entwickeln. Der Konvergenzradius sei r.

<u>Begründung:</u> siehe Literatur

<u>Beispiele:</u>

a) $f(x) = e^x$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$$
$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 1$$
$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$
$$r = \infty$$

b) $f(x) = e^{-x}$

$$f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots$$

$$\frac{1}{e} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} \pm \text{Rest}$$

$$\frac{1}{e} = 0{,}367857\ldots \pm \text{Rest}$$

$$|\frac{1}{e} - 0{,}367857| < \frac{1}{8!} = 2{,}4 \cdot 10^5$$

$$\frac{1}{e} = 0{,}367879\ldots$$

c)

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ \underline{f'''(x) = -\cos x} & \underline{f'''(0) = -1} \\ f''''(x) = \sin x & \vdots \\ \vdots & \end{array}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{1}{1!} \cdot x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 \pm \ldots$$

$r = \infty$

## 3.5. Methoden der Reihenentwicklung

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

Mac Laurinsche Reihenentwicklung

Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

a) Ableitungen berechnen

$$f(x) = (1+x)^n, n \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = (1+x)^n \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = n \cdot (1+x)^{n-1} \Rightarrow f'(0) = n$$

$$f''(x) = n(n-1) \cdot (1+x)^{n-2} \Rightarrow f''(0) = n(n-1)$$

$$f'''(x) = n(n-1) \cdot (n-2)(1+x)^{n-3} \Rightarrow f'''(0) = n(n-1)(n-2)$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!} x^1 + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k;$$

Fallunterscheidung:

$\alpha$) n $\in \mathbb{N}$: Die Reihe bricht nach der n-ten Potenz ab.
Der Konvergenzradius ist dabei r = $\infty$.

$\beta$) n $\notin \mathbb{N}$: Die Reihe bricht nicht nach endlich vielen Summanden ab.

$$r=\lim_k\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\lim\left|\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right|=\ldots$$

$$\ldots=\lim_k\left|\frac{k+1}{n-k}\right|=1$$

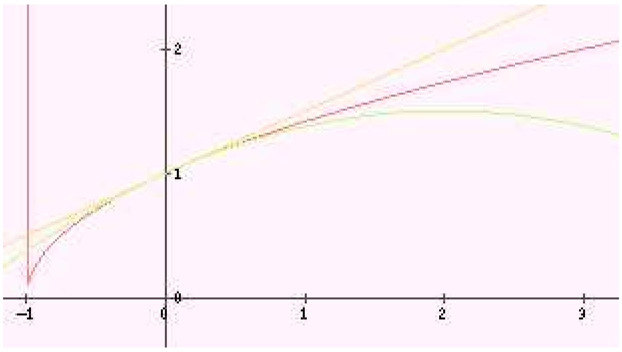
$$r=1$$

Beispiel: $n=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x^1-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\mp\ldots$$

1. Näherung für $\sqrt{1+x}: f_1(x)=1+\frac{1}{2}x$

2. Näherung für $\sqrt{1+x}: f_2(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$




b) Gliedweise ausmultiplizieren

$$f(x)=\frac{e^x}{1-x}$$

$$f(x)=e^x\cdot\frac{1}{1-x}=(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)=$$

$$=1+(1+1)\cdot x+(1+1+\frac{1}{2})\cdot x^2+(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})x^3+\ldots=1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\ldots$$

$$r=1$$

Beachte: Potenzreihen dürfen innerhalb des Kovergenzgebietes gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden.

c) Unbestimmter Ansatz

$$f(x)=\frac{4-2x}{1+\cos x}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$\Rightarrow 4-2x=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots)\cdot(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\pm\ldots)=$$

$$=\underbrace{2a_0}_{4}+\underbrace{2a_1x^1}_{-2}+\underbrace{(2a_2-\frac{a_0}{2})}_{=0}x^2+\underbrace{(2a_3-\frac{a_1}{2})}_{=0}x^3+\underbrace{(2a_4-\frac{a_2}{2}+\frac{a_0}{24})}_{=0}x^4+\ldots$$

$$\Rightarrow a_0=2;\ a_1=-1;\ a_2=\frac{1}{2};\ a_3=-\frac{1}{4};\ a_4=\frac{-1}{6};\ldots$$

$$f(x)=\frac{4-2x}{1+\cos x}=2-x^1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{6}x^4\pm\ldots$$

d) Partialbruchzerlegung

$$f(x)=\frac{3-2x}{x^2-3x+2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}(1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+(\frac{x}{3})^3+\ldots)+(1+x+x^2+x^3+\ldots)=$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{5}{4}x+\frac{9}{8}x^2+\frac{17}{16}x^3+\ldots$$

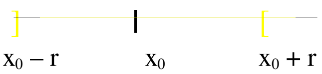
## 3.6. Taylor-Reihe

Definition: Es sei f eine auf dem Intervall I ⊂ ℝ unendlich oft differenzierbare Funktion f. Dann heißt $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$ die Taylor-Reihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0$.

Bemerkungen:

a) $x_0=0 \Rightarrow$ Taylor → Mac Laurin

b) $r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$




Konvergenzgebiet

Eventuell mit Rändern!

Beispiel: $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = 0$$
$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(1) = -1$$
$$f'''(x) = 2 \cdot x^{-3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$
$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3x^{-4} \Rightarrow f^{(4)} = -2 \cdot 3$$
$$f^{(5)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4\, x^{-5} \Rightarrow f^{(5)}(1) = 2 \cdot 3 \cdot 4$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 \mp \ldots =$$
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 \pm \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}$$

Bemerkung:

a) r = 1 (Quotientenkriterium)

b) $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \ldots$

# 4. Integralrechnung

## 4.1. Stammfunktionen

Definition: Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f, wenn F'(x)=f(x) in einem gemeinsamen Definitionsbereich.

Beispiel:

a) $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$

b) $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + C$

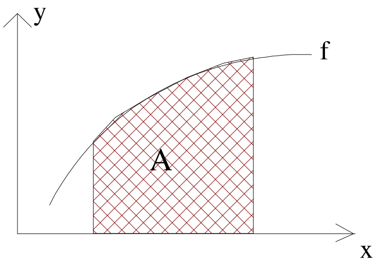
c) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \log x + C$

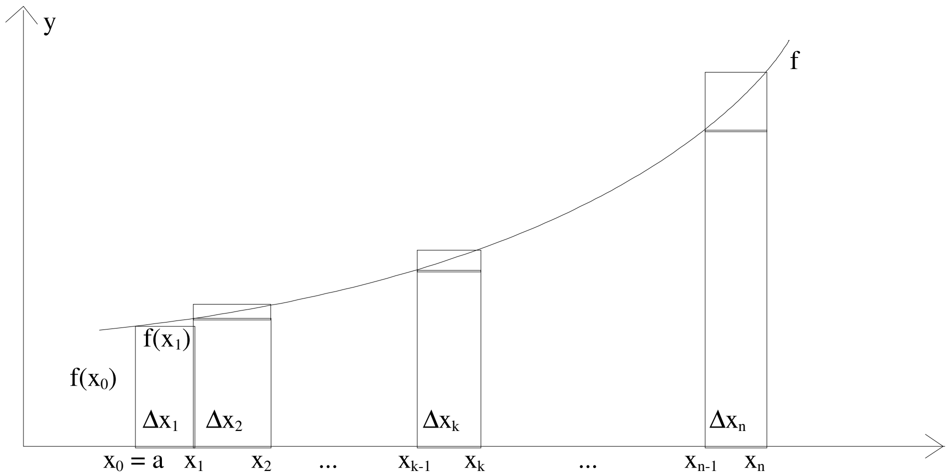
Definition: Das Aufsuchen aller Stammfunktionen zu einer gegebenen Funktion heißt Integration.

Bemerkung: Sind $F_1$ und $F_2$ verschiedene Stammfunktionen zu einer Funktion f, dann unterscheiden sich $F_1$ und $F_2$ nur durch eine Konstante.

Beweis:
$$F_1'(x) = f(x)$$
$$\underline{F_2'(x) = f(x)}$$
$$F_1'(x) - F_2'(x) = 0$$
$$[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$$
$$\Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$$
$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

## 4.2. Das bestimmte Integral




$\underline{s}_n$ Untersumme

$\overline{s}_n$ Obersumme

$$\underline{s}_n = f(x_0)\cdot \Delta x_1 + f(x_1)\cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\cdot \Delta x_k$$

$$\overline{s}_n = f(x_1)\cdot \Delta x_1 + f(x_2)\cdot \Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k$$

Offenbar gilt für den gesuchten Inhalt $a : \underline{s}_n \leq A \leq \overline{s}_n$

Für n ➔ ∞ und $\Delta x_k$ ➔ 0 besitzen $\underline{s}_n$ und $\overline{s}_n$ einen gemeinsamen Grenzwert.

Definition: Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot \Delta x_k$ mit $\Delta x_n \to 0$ heißt, falls er existiert, das bestimmte Integral der Funktion f von a bis b.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_a)\cdot \Delta x_n$$

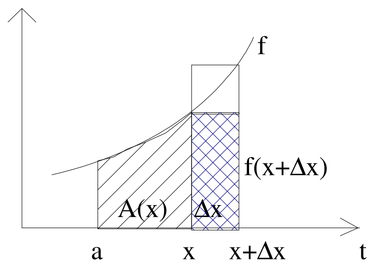
Beispiel:

$$f(x) = x^2, a = 0, b > 0$$

$$\overline{S}_n = f\frac{(\frac{b}{n})\cdot b}{n} + f(2\cdot\frac{b}{n})\frac{b}{n} + f(n\cdot\frac{b}{n})\cdot\frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n} + 4\cdot\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n} + 9\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n} + \ldots + n^2\frac{b^2}{n^2}\cdot\frac{b}{n} =$$

$$= \frac{b^3}{n^3}(1+4+9+\ldots+n^2) = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## 4.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung




$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ A heißt Integralfunktion

Anmerkung: f stetig und monoton wachsend.

Vergrößern wir das Flächenstück um Δx, so wächst der Flächeninhalt um

$$\Delta A = A(x+\Delta x) - A(x)$$
$$f(x)\cdot\Delta x \le \Delta A \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \,|\, \cdot\Delta x$$
$$f(x) \le \frac{\Delta(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$
$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x) \le \lim_{\Delta x\to 0} \frac{A(x+\Delta x)-A(x)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)$$
$$f(x) \le A'(x) \le f(x)$$
$$\Rightarrow A'(x) = f(x)!$$

Setzen wir A = F, denn A ist demnach eine Stammfunktion von f, dann gilt:

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)}$$

Beispiel:

$$F(x) = \int_a^x \ln\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2}\cdot\sin x\,dx$$
$$\Rightarrow F'(x) = \ln\sqrt{\frac{1}{2}x^2+2}\cdot\sin x$$

Folgerung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = ?$$

Es sei F eine beliebige Stammfunktion von f. F kann in folgender Form geschrieben werden:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$$
$$\Rightarrow F(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C \quad (1)$$
$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C \quad (2)$$
$$\overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

Beispiele:

a) $\int_{-1}^{3} 2x\,dx = [x^2]_{-1}^{3} = 9 - (-1)^2 = 8$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

Vereinbarung:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

unbestimmtes Integral

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

vgl. Formelsammlung!

## 4.4. Elementare Integrationsregeln

a) Faktorregel: $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

z.B. $\int_0^2 4x^3\,dx = 4 \cdot \int_0^2 x^3\,dx = 4 \cdot [\frac{1}{4}x^4]_0^2 = 16$

b) Summenregel: $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c) Vertauschungsregel: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

d) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

e) Zerlegungsregel: a ≤ b ≤ c

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

## 4.5. Integrationsmethoden

A) Integration durch Substitution

a) $\int \sqrt{4-x}\, dx = \ldots$

Substitution:

$$Z = 4 - x \qquad f(x) = x$$
$$\frac{dz}{dx} = -1 \qquad f'(x) = 1$$
$$-dz = dx \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\ldots = -\int \sqrt{z} \cdot dz = -\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \cdot (4-x)^{\frac{3}{2}} + C$$

b) $\int x \cos(x^2)\, dx = \ldots$

Substitution: $Z = x^2$

$$\frac{dz}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$$

$$\ldots = \int \cancel{x} \cdot \cos z \cdot \frac{dz}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int \cos z\, dz = \underline{\frac{1}{2} \sin(x^2) + C}$$

c) $\int_1^5 x \sqrt{x-5}\, dx = \ldots$

Substitution: $Z = \sqrt{5-x} \Rightarrow x = 5 - z^2$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}$$
$$dx = -2\sqrt{5-x}\, dz = -2z\, dz$$

Neue Grenzen: $1 \rightarrow \sqrt{5-1} = 2$

$5 \rightarrow \sqrt{5-5} = 0$

$$\ldots = -\int_2^0 (5 - z^2) \cdot z \cdot 2z\, dz = \int_2^0 (10z^2 - 2z^4)\, dz =$$

$$= -\left[\frac{10}{3} z^3 - \frac{2}{5} z^5\right]_2^0 = -\left\{0 - \left[\frac{80}{3} - \frac{64}{5}\right]\right\} = \frac{80}{3} - \frac{64}{5} = \ldots$$

d) $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C}$

Begründung: $Z = f(x)$

$$\frac{dz}{dx} = f'(x) \Rightarrow dx = \frac{dz}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int \frac{f'(x)}{Z} \cdot \frac{dz}{f'(x)} = \ln|Z| + C = \ln|f(x)| + C$$

z.B.: $\int \frac{4x}{2x^2+1}\, dx = \ln|2x^2+1| + C$

B) Partielle Integration:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\int f'(x)\, dx = \int u'(x) \cdot v(x)\, dx + \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$
$$\boxed{\Rightarrow \int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx}$$

a) $\int \underset{v}{x}\,\underset{u'}{e^x}\,dx = x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1\,dx = x\,e^x - e^x + C = \underline{(x-1)e^x + C}$

b) $\int \underset{u'}{x}\,\underset{v}{e^x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \frac{1}{2}\int x^2 e^x\,dx = ?$

c) $\int \ln x\,dx = \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{\ln x}\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \ln x - x + C = \underline{(\ln x - 1)x + C}$

d) $\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C$

C) Integration von echt gebrochen rationalen Funktionen – Partialbruchzerlegung

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ Grad N(x) > Grad Z(x)

Beispiel: $\int \frac{3}{x^2-4}dx = ?$

$$\frac{3}{x^2-4} = \frac{3}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}; | \cdot \text{HN}$$

Bestimmung von A und B:

$\text{HN} = (x+2)\cdot(x-2)$

$\Rightarrow 3 = A \cdot (x-2) + B(x+2)$

$x = 2 \Rightarrow 3 = A \cdot 0 + B \cdot 4$

$$\underline{B = \frac{3}{4}}$$

$x = -2 \Rightarrow 3 = A \cdot (-4) + 0$

$$\underline{A = -\frac{3}{4}};$$

Es

$$\int \frac{3}{x^2-4}dx = \int \left( \frac{-\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{3}{4}}{x-2} \right) dx = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-2}dx =$$

$$= -\frac{3}{4}\ln|x+2| + \frac{3}{4}\ln|x-2| + C = \frac{3}{4}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + C = \underline{\underline{\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C}};$$

gilt: Jeder Term $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ kann in eine Summe von Partialbrüchen zerlegt werden.

Vereinfachende Annahme: Alle Nullstellen des Nennerpolynoms sind reel!

Anleitung:

a) Bestimme die Nullstellen des Nennerpolynoms nach Lage und nach Vielfachheit.

b) Jeder Nullstelle müssen Partialbrüche nach folgender Vorschrift zugeordnet werden:

$x_1$: einfache NST $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}$

$x_1$: doppelte NST $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

$x_1$: dreifache NST $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \frac{A_3}{(x-x_1)^3}$

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ kann damit als Summe von sämtlichen Partialbrüchen geschrieben werden.

c) Konstanten $A_1$, $A_2$, ... müssen bestimmt werden.

d) Die Partialbrüche können integriert werden.

Beispiel: $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx = ?$

zu a) $x^3-5x^2+8x-4=0$

$\underline{a_1=1}$ Raten!

$(x^3-5x^2+8x-4):(x-1)=x^2$

$\underline{(-x^3-x^2)}$

$-4x^2+8x$

$\underline{-(-4x^2+4x)}$

$4x-4$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)\cdot(x-2)=0$

$\underline{x_{2,3}=2}$ doppelte Nullstelle!

$x_1=1:\rightarrow \frac{A}{x-1}$

$x_{2,3}=2:\rightarrow \frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$

$\frac{x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2};$

zu c) $\text{HN}=(x-1)(x-2)^2$

$x+1=A(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)$

$x=1\Rightarrow 2=A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0$

$\underline{A=2}$

$x=2\Rightarrow 3=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 1$

$\underline{C=3}$

$x=0\Rightarrow 1=A\cdot 4+B\cdot 2+C\cdot(-1)$

$1=8+2B-3;\ \underline{B=-2}$

zu d) $\int f(x)\,dx=\int\frac{2}{x-1}\,dx+\int\frac{-1}{x-2}\,dx+\int\frac{3}{(x-2)^2}\,dx$

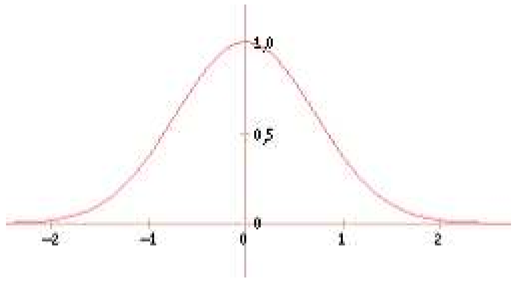
$x-2=z\Rightarrow\frac{dz}{dx}=1$

$\int\frac{3}{z^2}\,dz=3\cdot(-z^{-1})+C=-3\cdot(x-2)^{-1}+C$

$\Rightarrow\int f(x)\,dx=\underline{2\ln|x-1|-2\ln|x-2|-3(x-2)^{-1}+C}$

## D) Integration durch Potenzreihenentwicklung

a)




$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\,;\; x \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \ldots$$

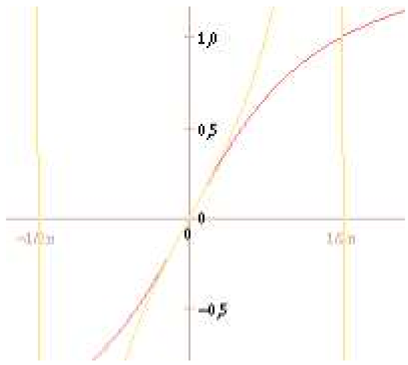
$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} \pm \ldots$$

$$I = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} \pm \ldots\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \frac{x^{11}}{1320} \pm \ldots\right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} \pm \ldots = 0{,}74 - \text{Rest, wobei Rest} < \frac{1}{1320}\,!$$

b)

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$




Es gilt F(x) = arctan x

Sei f(x) = tan x

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Es gilt: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x$

Sei x = 1

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$F(1) = \frac{\pi}{4}$$

<u>2. Methode</u>: Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots, |x| < 1$$

$$x = -t^2$$

$$\frac{1}{1-(-t^2)} = 1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + (-t^2)^3 + (-t^2)^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \mp \ldots$$

$$\Rightarrow F(x) = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 \mp \ldots)\,dt = \left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \mp \ldots\right]_0^x =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \mp \ldots \quad |x| \le 1$$

$$F(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \mp \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \mp \ldots$$

Näherung: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$

$\Rightarrow \pi \approx 3{,}28$